Algunos procesos estocásticos destacables

En este tema se van a considerar tres tipos destacables de procesos:

1. Procesos de Bernoulli
2. Camino aleatorio
3. Proceso de Poisson

Los procesos de Bernoulli y el camino aleatorio son cadenas, mientras que el proceso de Poisson es un proceso puntual.

Procesos de Bernoulli

El espacio de estados E y el paramétrico T son discretos.

Se considera una serie de experimentos independientes con los que se pueden obtener sólo dos resultados:

– Exito, con probabilidad p.

– Fracaso, con probabilidad $(1-p)$.

Se define el proceso $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ como $X_n \equiv$ número de éxitos al realizar n experimentos.

En este caso, $E = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ y $T = \mathbb{N}$.

Se tiene que $X_n \sim Bin\,(n, p)$ de manera que

$$P\{X_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Proposición

El proceso de Bernoulli es un proceso markoviano.

Demostración.

$$P\left(X_{n+1}=x_{n+1}|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right)=P\left(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n\right)=$$

$$=\begin{cases} p & \text{si} \quad x_n=x_{n+1}-1 \\ 1-p & \text{si} \quad x_n=x_{n+1} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

De este modo, la probabilidad sólo depende del valor que tome la *v.a.* X_n independientemente de los valores de las anteriores *v.a.* del proceso.

La ruina del jugador.

Supongamos que un juego que puede tomar valores igual a 1 y -1. Supongamos que el jugador A tiene un capital de k unidades y el B tiene $a-k$ donde $a>k$.

Supongamos que X_n representa el capital de A después de n juegos (o en el punto n), entonces $X_0=k$ y si $X_n=0$ el jugador se arruina (se tiene que tener $n\geq k$), mientras que si $X_n=a$ (siempre que $n\geq a-k$) entonces B se arruina, y en ambos casos el juego termina.

El interés principal es calcular $P\left(X_n=0\right)$ para cualquier n.

Denominamos como C_k el suceso consistente en que A se arruine partiendo de un capital k y como los sucesos $X_n=0$ $(n=k,k+1,k+2,\ldots)$ son mutuamente excluyentes entonces

$$P\left(C_k\right)=\sum_{n=k}^{\infty}P\left(X_n=0\right)$$

Se puede observar que el sumatorio empieza en $n=k$, ya que el mínimo número de pasos en los que el juego podría acabar es k. Por otro lado, aunque los resultados de cada juego son independientes, las variables X_n no lo son por ser un proceso markoviano, como se ha demostrado previamente.

Está claro que el cálculo de $P(X_n = 0)$ puede ser un proceso tedioso, aunque un método directo sería utilizar ecuaciones en diferencias.

Dado el carácter secuencial del juego, después de saber cuál es el resultado de cada juego el capital de A aumenta o decrece en una unidad. Este capital se convierte en el capital inicial del nuevo juego, así, si definimos $u_k = P(C_k)$ (la probabilidad de que A se arruine partiendo de un capital k), entonces, después de una partida la probabilidad de ruina es ó $u_{k+1} = P(C_{k+1})$ ó $u_{k-1} = P(C_{k-1})$.

Consideramos el resultado de la partida, y denominamos D a que A gane y como D^c a que pierda. Por el teorema de la probabilidad total

$$P(C_k) = P(C_k|D)\,P(D) + P(C_k|D^c)\,P(D^c)$$

Como

$$\begin{aligned} P(C_k|D) &= P(C_{k+1}) \\ P(C_k|D^c) &= P(C_{k-1}) \\ P(D) &= p \\ P(D^c) &= 1 - p = q \end{aligned}$$

con lo cual se puede reescribir como

$$u_k = u_{k+1}p + u_{k-1}q$$

es decir

$$pu_{k+1} - u_k + qu_{k-1} = 0$$

que es una *ecuación homogénea de segundo orden.*

Para que quede definida completamente se tienen que establecer las condiciones iniciales. En este caso, si se parte de capital 0 la ruina es segura:

$$u_0 = P(C_0) = 1$$

mientras que si empieza con capital a, la ruina es imposible

$$u_a = P\left(C_a\right) = 0.$$

Este tipo de ecuaciones se usan bastante en Dinámica de Poblaciones. Una forma simple de tratar de solucionarlas es considerar soluciones de la forma

$$u_k = Am^k$$

donde A es una constante y m ha de calcularse. Si sustituimos en la ecuación

$$pu_{k+1} - u_k + qu_{k-1} = Am^{k-1}\left(pm^2 - m + q\right)$$

y esto es igual a 0 siempre que $pm^2 - m + q = 0$ (asumiendo soluciones no triviales cuando $A = 0$ ó $m = 0$).

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación característica.*

Dado que $p + q = 1$, se tiene que

$$pm^2 - m + q = (pm - q)(m - 1) = 0$$

con lo que las soluciones (raíces) son

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \\ m_2 &= \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que la solución general es una combinación lineal de estas dos soluciones, esto es,

$$u_k = A_1 m_1^k + A_2 m_2^k = A_1 + A_2\left(\frac{q}{p}\right)^k$$

donde A_1 y A_2 son constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales:

Como $u_0 = 1$ y $u_a = 0$, entonces, si denoto como $s = q/p$

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ A_1 + A_2 s^a &= 0 \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{s^a}{1-s^a} \\ A_2 &= \frac{1}{1-s^a} \end{aligned}$$

Así, la probabilidad de que el jugador se arruine dado un capital inicial de k es (cuando $p \neq \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} u_k &= -\frac{s^a}{1-s^a} + \frac{1}{1-s^a} s^k \\ &= \frac{s^k - s^a}{1-s^a}. \end{aligned}$$

Cuando $p = q = \frac{1}{2}$, la ecuación tiene soluciones *repetidas* y hay que tratar el caso de manera diferente.

La ecuación característica de

$$\frac{1}{2} u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2} u_{k-1} = 0$$

es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m^2 - m + \frac{1}{2} &= 0 \Longrightarrow \\ m^2 - 2m + 1 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como raíz repetida $m_1 = m_2 = 1$ y así una solución es 1, aunque se necesita otra solución independiente

Para raíces repetidas en ecuaciones en diferencias se prueba una solución del tipo ($k\times$ raíz repetida), $k \cdot 1$:

$$\frac{1}{2} u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2} u_{k-1} = \frac{1}{2}(k+1) - k + \frac{1}{2}(k-1) = 0.$$

Así la solución general es

$$u_k = A_1 + A_2 k$$

y con las mismas condiciones iniciales se tiene que

$$u_k = \frac{a-k}{a}.$$

Si el juego lo consideramos desde el punto de vista de B la probabilidad de su ruina sería v_{a-k}. Intercambiando los papeles de p y q ($s \to s^{-1}$) y reemplazando k por $a-k$, entonces B se arruina con probabilidad

$$v_{a-k} = \frac{s^k - 1}{s^a - 1}$$

cuando $s = \frac{p}{q} \neq 1$.

En el caso en que $s = \frac{p}{q} = 1$, entonces

$$v_{a-k} = \frac{k}{a}.$$

En cualquiera de los dos casos,

$$u_k + v_{a-k} = 1,$$

es decir, el juego termina cuando alguno de los dos jugadores pierde.

Duración esperada del juego.

Un aspecto importante del juego es determinar cuántas partidas se espera jugar antes de terminar.dicho juego.

Supongamos que se tienen dos variables: k, el capital inicial y n, el número restante de partidas hasta que se termine.

Como n es desconocido, se considera que es el resultado de una v.a. N.

Se denota como $P(n|k)$ la probabilidad de que el juego acabe en n partidas cuando el capital inicial es k.

Evidentemente, n es un número positivo mayor o igual que el mínimo entre k y $a-k$, ya que si un jugador ganase (o perdiese) todos los juegos entonces ganaría (o perdería) el juego en $a-k$ (ó k) partidas. Así, el número esperado de partidas hasta terminar el juego, o la duración esperada es

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n|k) = d_k$$

En cada paso, el proceso se moverá desde el estado (k, n) hasta el estado $(k+1, n-1)$ con probabilidad p, o al estado $(k-1, n-1)$ con probabilidad $q = 1-p$.

Por la ley de la probabilidad total

$$P\,(n|k) = P(n-1|k+1)p + P(n-1|k-1)q$$

donde $n, k \geq 1$.

Sustituyendo $P\,(n|k)$ en la ecuación anterior se obtiene la duración esperada d_k. Operando, se obtiene que

$$pd_{k+1} - d_k + qd_{k-1} = -1$$

Esta es una ecuación en diferencias no homogénea de segundo orden, cuyas condiciones iniciales vienen dadas por el hecho de que si $k = 0$ o $k = a$, entonces el juego termina, de modo que la duración esperada es 0:

$$d_0 = d_a = 0.$$

En la teoría general de ecuaciones en diferencias, se determina una solución como la suma de la solución de la ecuación homogénea y una solución *particular* de la ecuación *completa*.

En este caso, si $s = \frac{q}{p} \neq 1$, la solución de la ecuación homogénea es

$$A_1 + A_2 s^k,$$

mientras que si $s = \frac{q}{p} = 1$ la solución general es de la forma

$$A_1 + A_2 k.$$

Para buscar una solución particular, se hace tanteando posibles soluciones, y dado que la parte derecha de la ecuación es -1, se prueba como solución $d_k = Ck$, dado que cualquier constante es solución de la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} pd_{k+1} - d_k + qd_{k-1} + 1 &= pC(k+1) - Ck + qC(k-1) + 1 = \\ C(p-q) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Así tomando

$$C = \frac{1}{q-p}$$

la solución general es

$$d_k = A_1 + A_2 s^k + \frac{k}{q-p}$$

Considerando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ A_1 + A_2 s^a + \frac{a}{q-p} &= 0 \end{aligned}$$

y despejando de estas ecuaciones se obtiene que la duración esperada, cuando $s = \frac{q}{p} \neq 1$, es

$$d_k = \frac{1}{1-2p}\left[k - \frac{a\left(1-s^k\right)}{1-s^a}\right].$$

En el caso de que $s = \frac{q}{p} = 1$, la ecuación en diferencias es, entonces, dado que $p = q = \frac{1}{2}$,

$$d_{k+1} - 2d_k + d_{k-1} = -2$$

siendo la solución de la ecuación homogénea de la forma

$$A_1 + A_2 k.$$

Así se debe tantear una solución particular de la forma Ck^2 :

$$\begin{aligned} d_{k+1} - 2d_k + d_{k-1} + 2 &= C(k+1)^2 - 2Ck^2 + C(k-1)^2 + 2 = \\ &= 2C + 2 = 0 \end{aligned}$$

De este modo, tomando $C = -1$ y considerando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} d_k &= A_1 + A_2 k - k^2 = \\ &= k(a-k). \end{aligned}$$

Por ejemplo, si se toma $k = 10$, $a = 20$ y $p = \frac{1}{2}$, el número máximo esperado de partidas es de 100.

Observaciones.

Se tienen diferentes variaciones a este problema:

– Cuando el oponente es *infinitamente* rico, que equivaldria a jugar contra un casino con muchos recursos, esto es, con $a \to \infty$.

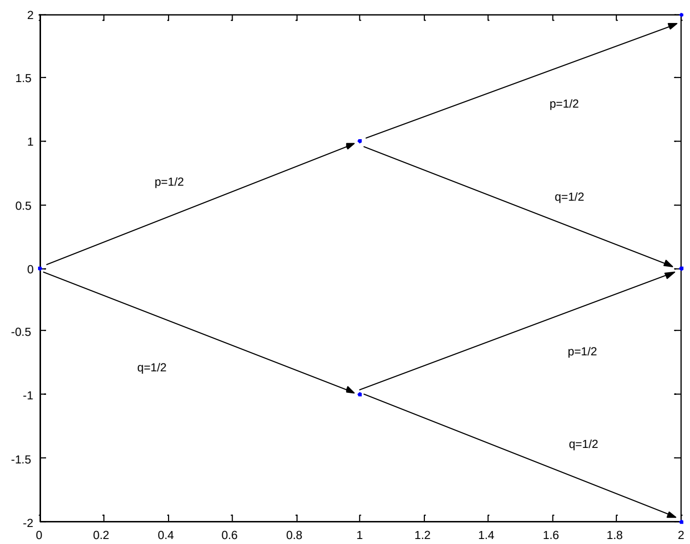
– Cuando se considera la probabilidad de un *empate*, además de ganar o perder sólo.

– Cuando el número de unidades que se pierde o gana no son siempre iguales entre sí.

Camino aleatorio

Es un proceso muy relacionado con el proceso de Bernoulli.

Inicialmente se parte de una partícula situada en el origen. Esta partícula puede seguir dos posibles caminos: un salto hacia arriba con probabilidad p ó bien otro hacia abajo con probabilidad q.



Se puede definir, entonces, el proceso $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ como

$$X_n \equiv \text{Posición de la partícula después de } n \text{ movimientos.}$$

Se observa que la posición de la partícula en el instante $n+1$ dependerá sólo de la posición en la que se encuentre en el instante n. Es así un proceso markoviano:

$$\begin{aligned} P\left(X_n = j | X_{n-1} = j-1\right) &= p, \\ P\left(X_n = j | X_{n-1} = j+1\right) &= 1-p = q \end{aligned}$$

Si se denomina W_n el salto efectuado por la partícula en el movimiento n, entonces

$$W_n = \begin{cases} 1, & p \\ -1, & q \end{cases}$$

luego,

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} W_i = X_{n-1} + W_n$$

donde $n = 1, 2, \ldots$

Las *v.a.* toman valores en -1 y $+1$ (en vez de 0 y 1) lo cual es una *v.a.* de Bernoulli *modificada*. En el problema de la ruina del jugador, $X_0 = k$, aunque en el paseo aleatorio se parte de $X_0 = 0$.

Al ser W_i independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} E\left(X_n\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) = nE(W) \\ Var\left(X_n\right) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) = nVar(W) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} E(W) &= 1p + (-1)q = p - q \\ Var(W) &= E(W^2) - E^2(W) \end{aligned}$$

y

$$E(W^2) = 1^2 p + (-1)^2 q = p + q = 1$$

luego

$$Var(W) = 1 - (p-q)^2 = 4pq$$

De este modo, la distribución de probabilidad del paseo aleatorio en el estado n tiene como media y varianza

$$\begin{aligned} E\left(X_n\right) &= n(p-q) \\ Var\left(X_n\right) &= 4npq \end{aligned}$$

Si $p > 1/2$, se espera un alejamiento del origen en dirección positiva, y al contrario si $p < 1/2$. De todos modos, al depender $Var\left(X_n\right)$ de la etapa en la que se está, n, la incertidumbre acerca de dónde se encuentra la partícula aumenta con n.

Si $p = 1/2$, $Var\left(X_n\right) = \frac{4n}{4} = n$, que es el máximo de la varianza que se puede alcanzar (se puede comprobar despejando de $\frac{dVar(X_n)}{dp} = 0$).

El conocimiento de la media y la varianza de la distribución no permite estimar la distribución de probabilidad, aunque si n es grande, se puede aplicar el teorema Central del Límite (aplicando la corrección por continuidad):

$$Z_n = \frac{X_n - n(p-q)}{\sqrt{4npq}} \sim N(0,1)$$

Ejemplo: Consideremos el paseo aleatorio con $n = 100$, $p = 0{,}7$.

$$\begin{aligned} E\left(X_{100}\right) &= 40 \\ Var\left(X_{100}\right) &= 84 \end{aligned}$$

Supongamos que se trata de calcular la probabilidad de que la posición de la partícula en el paso 100-ésimo esté entre 35 y 45 posiciones desde el origen. Por ser X_n discreta, se usa la corrección por continuidad,

$$\begin{aligned} P\left(35 \leq X_{100} \leq 45\right) &= P\left(35{,}5 \leq X_{100} \leq 45{,}5\right) = \\ P\left(\frac{35{,}5-40}{\sqrt{84}} \leq X_{100} \leq \frac{45{,}5-40}{\sqrt{84}}\right) &= P\left(-0{,}60 \leq Z_{100} \leq 0{,}60\right) = \\ &= \Phi(0{,}60) - \Phi(-0{,}60) = 0{,}45 \end{aligned}$$

La distribución de probabilidad después de n pasos

La determinación de la distribución de probabilidad de la *v.a.* X_n después de n pasos es un problema complicado. La posición X_n es

$$X_n = R_n - L_n$$

donde R_n es el número de pasos positivos (a la derecha) $(+1)$ y L_n es el número de pasos negativos (a la izquierda) (-1). Así

$$n = R_n + L_n$$

Sumando las dos expresiones anteriores, se tiene

$$R_n = \frac{1}{2}(n + X_n)$$

que toma valores enteros cuando n y X_n son ambos pares o ambos impares.

Supongamos que $v_{n,x}$ es la probabilidad de que el paseo esté en el estado x (entero) después de n pasos:

$$v_{n,x} = P(X_n = x) = P\left(R_n = \frac{1}{2}(n + x)\right).$$

R_n se distribuye como una binomial de parámetros n y p, ya que el camino se mueve a la derecha o no se mueve.en cada paso, y estos son independientes. Así,

$$v_{n,x} = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n-x)}$$

donde (n, x) son ambos o pares o impares, $-n \leq x \leq n$. Se puede considerar un argumento similar si x es un número negativo.

Ejemplo. Calcular la probabilidad de que el suceso $X_5 = 3$ ocurra en un paseo aleatorio con $p = 0{,}6$.

El suceso $X_5 = 3$ ocurre cuando cuando se obtienen cuatro 1's y un -1 en cualquier orden. La probabilidad de estas secuencias es $p^4 q$ y hay $\binom{5}{1}$ formas en que se puede hacer, de modo que

$$P(X_5 = 3) = \binom{5}{1} p^4 q = 0{,}259,$$

o bien, aplicando la fórmula anterior, se obtiene lo mismo ya que $\binom{5}{4} = \binom{5}{1}$.

$v_{n,x}$ es la probabilidad de que el camino termine en x después de n pasos, de modo que podría sobrepasar x antes de retornar a él.

Una probabilidad relacionada es la de que la primera visita al estado x ocurra en el paso n. Para estudiar esta cantidad, se considera, previamente, el concepto de funciones generatrices.

Función generatriz de momentos y función generatriz de probabilidad.

Usualmente se usa la función generatriz de momentos para calcular momentos de distribuciones de probabilidad tanto discretas como continuas.

Se tenía que el desarrollo del número e

$$e^{tX} = \exp(tX) = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tX)^r}{r!} + \cdots$$

de modo que la función generatriz se define como

$$M_X(t) = E\left(\exp(tX)\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} E\left(X^r\right).$$

Así,

$$\begin{aligned} M_X'(0) &= E(X) \\ M_X''(0) &= E\left(X^2\right) \Longrightarrow Var(X) = M_X''(0) - \left(M_X'(0)\right)^2. \end{aligned}$$

Sin embargo, la función generatriz de probabilidad se define sólo para variables aleatorias discretas.

Si se denomina $p_n = P(N = n)$ donde $N = 0, 1, 2, \ldots$ entonces

$$G_N(s) = E\left(s^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n.$$

Se tiene que

1. $G_N(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$

2. $G'_N(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = E(N)$

3. Como $G''_N(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot p_n = E(N^2) - E(N)$ entonces

$$Var(N) = E\left(N^2\right) - (E(N))^2 = G''_N(1) + G'_N(1) - (G'_N(1))^2 .$$

Se puede asociar a esta función cualquier sucesión $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

siempre que la serie correspondiente converja en un entorno de $s = 0$. No tiene por qué cumplirse que $H(1) = 1$.

Aplicando este concepto, la probabilidad de que el paseo aleatorio se encuentre en el origen 0 en el paso n, suponiendo que $p = 1/2$, es

$$v_{n,0} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{1}{2}n} = p_n$$

para $n = 2, 4, 6, \ldots$

Se asume que $v_{n,0} = 0$ para n impar, y la función generatriz es, entonces,

$$\begin{aligned} H(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} s^{2n} \overset{(*)}{=} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} s^{2n} = \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(*) desarrollando el término $\binom{2n}{n} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} 2^{2n}$ usando, después de reagrupar términos, que

$$\binom{a}{r} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}$$

para $a \in \mathbb{R}$.

Denominamos, a continuación,

(i) $A \equiv$ Suceso correspondiente a que $X_n = 0$, y

(ii) $B_k \equiv$ Suceso primera visita al origen ocurre en el paso k.

Aplicando la ley de probabilidad total,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A|B_k\right) P\left(B_k\right).$$

Sea $f_k = P\left(B_k\right)$. La distribución condicionada $P\left(A|B_k\right)$ es la probabilidad de que el camino regrese al origen después de $(n-k)$ pasos, es decir, $P\left(A|B_k\right) = p_{n-k}$. Por otro lado, p_n es la probabilidad de el paseo aleatorio esté en el origen en el paso n. Se observa que $p_n = 0$ si n es impar.

La ecuación previa se puede escribir como

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} f_k$$

Multiplicando ambos lados por s^n y sumando para $n \geq 1$, como $p_0 = 1$ y $f_0 = 0$, se obtiene la expresión de $H(s) - 1$:

$$H(s) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} f_k s^n$$

$$H(s) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} f_k s^n \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k$$

(*) ya que $(p_n f_0 s^n + p_{n-1} f_1 s^n + p_{n-2} f_2 s^n + \cdots + p_0 f_n s^n)$ sumando en n da lugar a

$$\begin{array}{l}
p_0 f_0 s^0 \\
p_1 f_0 s^1 + p_0 f_1 s^1 \\
p_2 f_0 s^2 + p_1 f_1 s^2 + p_0 f_2 s^2 \\
p_3 f_0 s^3 + p_2 f_1 s^3 + p_1 f_2 s^3 + p_0 f_3 s^3 \\
\cdots\cdots
\end{array}$$

Sumando las sumas anteriores por columnas, se tiene:

$$\left(f_0 s^0 \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n\right) + \left(f_1 s^1 \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n\right) + \left(f_2 s^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n\right) + \cdots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

La fórmula anterior es el producto de dos series y se denomina, también, convolución de las dos distribuciones.

Si se denota

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n$$

es la función generatriz de probabilidad de la distribución de la primera visita, entonces

$$\begin{aligned} H(s) - 1 &= H(s)Q(s) \\ Q(s) &= \frac{H(s)-1}{H(s)} = 1 - \left(1 - s^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La probabilidad de que el paseo aleatorio regrese al origen en algún paso es

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = Q(1) = 1,$$

es decir, es *absorbente*. Sin embargo, el número medio de pasos hasta que esto ocurra es

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f_n = Q'(1) = \left.\frac{s}{\left(1-s^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right|_{s\to 1} \longrightarrow \infty,$$

esto es, un paseo aleatorio simétrico, aunque regresa al origen lo hace en un número esperado infinito de pasos.

Ejemplo.

Calcula la probabilidad de que un paseo aleatorio simétrico que empieza en el origen, regrese a él por primera vez en 6 pasos.

Se tiene que calcular el coeficiente de s^6 en la serie de potencias asociada a la función generatriz de probabilidad $Q(s)$, que es

$$\begin{aligned} & Q(s) = 1 - \left(1 - s^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(*)}{=} \\ & 1 - \left[1 - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{8}s^4 - \frac{1}{16}s^6 + O\left(s^8\right)\right] = \\ = \; & \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4 + \frac{1}{16}s^6 + O\left(s^8\right). \end{aligned}$$

Luego la probabilidad de un primer retorno al origen en el paso 6 es $\frac{1}{16}$.

(*) ya que

$$\begin{aligned}(1+s)^a &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{a}{r}s^r = \\ &= 1+as+\frac{a(a-1)}{2!}s^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}s^3+\cdots\end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $|s|<1$.

Observación.

Supongamos un paseo aleatorio simétrico y que se observa durante un intervalo de tiempo $(0,t]$ espaciado igualmente en instantes $0, 2d, \ldots$ y que la longitud de los pasos se supone (sin pérdida de generalidad) que es $\sqrt{d}$ de modo que en el m-ésimo paso la posición W_{md} es tal que

$$P\left(W_{md}=\sqrt{d}\right)=P\left(W_{md}=-\sqrt{d}\right)=\frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}E\left(W_{md}\right) &= 0 \\ Var\left(W_{md}\right) &= E\left(W_{md}^2\right)=d\end{aligned}$$

Si asumimos $X_0=0$ entonces $E\left(X_t\right)=0$ y $Var\left(X_t\right)=nd=t$ y este resultado es similar al obtenido previamente cuando se tenía que $E\left(X_n\right)=n$.

Si se aproxima d a 0, entonces el efecto es de aproximación a un proceso de tiempo continuo con pasos de longitud muy pequeña. Aplicando el Teorema Central del Límite, se obtiene la distribución asintótica que es normal con media 0 y varianza t. En el límite, X_t para todo t cumple el llamado *proceso de Wiener* o movimiento browniano.

En general, X_t forma un proceso de Wiener si para dos instantes de tiempo t_1 y t_2 $(t_1<t_2)$ se cumple que $X_{t_1}-X_{t_2}$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza t_1+t_2, de modo que estas longitudes de paso, para todo conjunto de intervalos que no se solapan, son variables aleatorias normales independientes entre sí.

Proceso de Poisson

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución *de Poisson* de parámetro λ, $X \sim Po(\lambda)$ si

$$P\left(X = k\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Se tiene que si $X \sim Po(\lambda)$ entonces

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

De forma similar, se calcula

$$Var\left[X\right] = \lambda.$$

Motivación

Supongamos que $N(t)$ es una *v.a.* que representa el tamaño de una población en el instante t y asumamos que

$$p_n(t) = P\left[N(t) = n\right] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

para $t \geq 0$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Así, $N(t) \sim Po(\lambda t)$.

Si se considera para $n \geq 1$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \frac{(n - \lambda t)}{n!} \lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}$$

Así, el máximo de de estas probabilidades para cada n se alcanza en $t = n/\lambda$.

Cuando $n = 0$, se tiene

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda p_0(t)$$

y, en general,

$$\begin{aligned}\frac{dp_n(t)}{dt} &= \frac{(n-\lambda t)}{n!}\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t} = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t} - \frac{1}{n!}\lambda t\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t} = \\ &= \lambda\left[p_{n-1}(t) - p_n(t)\right]\end{aligned}$$

donde $n \geq 1$.

Ambas ecuaciones forman una secuencia de ecuaciones diferenciales para $p_n(t)$, que se pueden aproximar considerando incrementos pequeños $\delta t > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{p_0\left(t+\delta t\right) - p_0(t)}{\delta t} &\approx -\lambda p_0(t) \\ \frac{p_n\left(t+\delta t\right) - p_n(t)}{\delta t} &\approx \lambda\left[p_{n-1}(t) - p_n(t)\right]\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}p_0(t+\delta t) &\approx \left(1-\lambda\delta t\right)p_0(t) \\ p_n\left(t+\delta t\right) &\approx \lambda\delta t p_{n-1}(t) + \left(1-\lambda\delta t\right)p_n(t)\end{aligned}$$

cuando $n \geq 1$.

De lo anterior se deducen varias cosas:

– La probabilidad de que no se observe ninguna partícula en un intervalo infinitesimal δt es $(1-\lambda\delta t)$ y, por lo tanto, la probabilidad de de que una partícula se observe en un intervalo infinitesimal δt es $\lambda\delta t$, y la probabilidad de que dos o más partículas se observen es despreciable

– El único modo de observar n partículas en el tiempo $t+\delta t$ es que, o bien se recogió una partícula en el tiempo δt, cuando había $(n-1)$ partículas, o bien, que no aparezca ninguna partícula con probabilidad $(1-\lambda\delta t)$, cuando había n partículas en el tiempo t.

En realidad, lo anterior es una versión del teorema de la probabilidad total y se usa, frecuentemente, como el punto de partida para modelizar procesos aleatorios en tiempo continuo.

Se puede caracterizar a los procesos de Poisson del siguiente modo:

Caracterización

Se dice que un proceso estocástico $\{N_t, t \in T\}$ es un proceso de Poisson, donde N_t es el número de sucesos que ocurren en un intervalo $(0, t]$ si los sucesos cumplen las siguientes condiciones:

(i) El número de sucesos que aparecen en un intervalo de tiempo es independiente del número de sucesos que ocurren en intervalos de tiempo anteriores.

(ii) *Homogeneidad en el tiempo*: la probabilidad de que en un intervalo de tiempo ocurran k sucesos sólo depende de la longitud del intervalo y no de dónde se encuentre éste:

$$P\{(N_{s+t} - N_t) = k\} = P\{N_s = k\}$$

(iii) *Estabilidad*: El número medio de sucesos (a largo plazo) que ocurren por unidad de tiempo es constante e igual a una tasa dada λ :

$$E\left(\frac{N_t}{t}\right) = \lambda$$

(iv) El número de sucesos que ocurren en un intervalo infinitesimal $(0, \triangle t)$ puede ser:

1. Dos o más sucesos, con

$$P\left(N_{\triangle t} > 1\right) = o(\triangle t)$$

   donde $o(\triangle t)$ es tal que

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{o(\triangle t)}{\triangle t} = 0$$

   es decir, tiende a 0 más rápidamente que $\triangle t$.

2. Un solo suceso con

$$P\left(N_{\triangle t} = 1\right) = \lambda \triangle t + o(\triangle t)$$

3. Ningún suceso con

$$P\left(N_{\triangle t} = 0\right) = 1 - \lambda \triangle t + o(\triangle t)$$

Esto implica que se puede elegir un intervalo suficientemente pequeño de tiempo, para que sólo ocurra un suceso (o ninguno) cuando las ocurrencias son de una en una.

Bajo estas condiciones,

Proposición

El número de ocurrencias en el intervalo $(0,t]$ sigue una distribución de Poisson. Así si N_t cuenta el número de ocurrencias en el intervalo $(0,t]$, entonces $N_t \sim Poiss(\lambda t)$, esto es,

$$P\left(N_t = k\right) = \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Demostración.

Se puede subdividir el intervalo $(0,t]$ en n intervalos de longitud t/n de manera que en cada uno de ellos solo pueda ocurrir un suceso. Así, $P\left(N_t = k\right)$ es la probabilidad de que en k intervalos de los n ocurra un suceso y en los otros $(n-k)$ intervalos no ocurra ningún suceso.

Si identificamos:

- **éxito:** Que ocurra un suceso en un intervalo de longitud $\frac{t}{n}$.
- **fracaso**: Que no ocurra ningún suceso en un intervalo de longitud $\frac{t}{n}$.

Por la condición (ii) se puede suponer que la probabilidad de alcanzar un éxito es proporcional a la longitud del intervalo: $P\left(\text{éxito}\right) = \lambda \frac{t}{n}$.

Así, al ser una $Bin\left(n, \frac{\lambda t}{n}\right)$,

$$P\left(N_t = k\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

NOTA:

Aproximación de la distribución binomial por la Poisson:

$$Bin(n,p) \longmapsto_{p\to 0}^{n\to\infty} Poiss(\lambda)$$

cuando $np \approx \lambda$.

En este caso, si $n \to \infty$ y $p = \frac{\lambda t}{n} \to 0$ entonces

$$np = \frac{n\lambda t}{n} = \lambda t$$

de modo que $N_t \sim Poiss(\lambda t)$. ■

Se tiene, también una relación con la distribución exponencial.

Proposición.

En un proceso de Poisson, el tiempo que transcurre entre dos sucesos es una *v.a.* que se distribuye como una $\exp(\lambda)$.

Demostración.

Sean $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ los momentos en que ocurren los sucesos del proceso de Poisson de tasa λ.

Se define $Z_n = t_n - t_{n-1}$ como el tiempo transcurrido entre dos sucesos consecutivos. Como paso intermedio, calculamos $1 - F_{Z_n}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} & 1 - F_{Z_n}(x) = P\left(Z_n > x\right) = \\ = \ & P\left(\text{tiempo transcurrido entre dos sucesos sea } > x\right) = \\ = \ & P\left(\text{No ocurra ningún suceso entre } (t_{n-1} \text{ y } t_{n-1} + x)\right) = \\ & P\left((N_{t_{n-1}+x} - N_{t_{n-1}}) = 0\right) = P\left(N_x = 0\right) \overset{(*)}{=} \frac{e^{-\lambda x}}{0!}(\lambda x)^0 = e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

(*) ya que $N_x \sim Poiss(\lambda x)$.

De este modo,

$$F_{Z_n}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, de modo que

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$$

de manera que $Z_n \sim \exp(\lambda)$. ■

Modelos más realistas.

El modelo estándar presenta condiciones demasiado fuertes: todos los sucesos tienen la misma probabilidad de aparecer, y la tasa de llegada de los sucesos es siempre la misma. Se puede generalizar, así, el caso de que varíen las tasas:

Definición (proceso de Poisson no homogéneo)

Se dice que $\{N(t), t \in T\}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda(r)$ si

(i) $N(0) = 0$

(ii) $N(t)$ tiene incrementos independientes

(iii) $N(t+s) - N(s)$ se distribuye como una Poisson de media $\int_s^t \lambda(r)dr$.

Un proceso tal no cumple la propiedad de que los tiempos entre sucesos se distribuyen como una exponencial, y su tratamiento es complicado a nivel matemático.

Se puede asociar, también, al proceso de Poisson una serie de $v.a.i.i.d.$ Y_i e independientes del proceso de llegadas. Por ejemplo, supongamos un restaurante de comida rápida. Supongamos que entre las 14:00h y 15:00h los clientes llegan según un proceso de Poisson con tasa igual λ y sea Y_i el número de personas que ocupan el vehículo i-ésimo.

Otro ejemplo sería un servidor de correo electrónico, donde los tiempos de llegadas de los mensajes se puede modelizar como un proceso de Poisson, y se puede asociar una variable Y_i que mide el tamaño de cada mensaje. Sería natural considerar las sumas de los Y_i que se han obtenido hasta el instante t

$$S(t) = Y_1 + \cdots + Y_{N(t)}$$

donde $S(t) = 0$ si $N(t) = 0$. En los ejemplos anteriores, $S(t)$ expresa el número de clientes que ha llegado hasta el tiempo t, o el número total de bytes enviados en los mensajes hasta el tiempo t. En cualquiera de los casos es interesante calcular el valor esperado de $S(t)$ y su varianza.

Teorema

Sean $Y_1, Y_2, \ldots$ una serie de *v.a.i.i.d.*, sea N una *v.a.* independiente de valor entero, y sea $S = Y_1 + \cdots + Y_N$ con $S = 0$ cuando $N = 0$.

(i) Si $E(N) < \infty$ entonces $E(S) = E(N) \cdot E(Y_i)$.

(ii) Si $E(N^2) < \infty$ entonces $Var(S) = E(N) \cdot Var(Y_i) + Var(N) \cdot (E(Y_i))^2$.

(iii) Si $N \sim Poiss(\lambda)$ entonces $Var(S) = \lambda \cdot E(Y_i^2)$.

La demostración puede verse en Durret (1999), pág. 138.

Ejemplo.

Supongamos que el número de clientes que entra en un restaurante durante un día tiene una distribución de Poisson, de media 81 y que cada cliente gasta una media de 6 euros con una desviación de 3 euros. A partir del teorema anterior, se tiene que $E(S) = E(N) \cdot E(Y_i) = 81 \cdot 6 = 486$.

La varianza es $Var(S) = \lambda \cdot E(Y_i^2) = 81 \cdot (3^2 + 6^2) = 3645$, es decir una desviación estándar de $\sqrt{3645} = 60{,}4$.

Principio de superposición:

Supongamos que $N_1(t), \ldots, N_k(t)$ son procesos de Poisson independientes con medias respectivas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, entonces $N_1(t) + \cdots N_k(t)$ es un proceso de Poisson con media $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Relación con la distribución uniforme:

Supongamos que $T_1, T_2, \ldots$ son los tiempos de llegada de un proceso de Poisson con tasa λ y sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ v.a. independientes y distribuidas uniformemente en $[0, t]$. Si se condiciona en $N(t) = n$, entonces el conjunto de tiempos de llegadas $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ se distribuye como $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$.

Esto significa que, sabiendo que se han producido n llegadas, el conjunto de los tiempos de dichas llegadas se distribuyen de modo uniforme en un intervalo $[0, t]$.