HOJA DE EJERCICIOS 1 (Estadística II)

1. Sea X variable aleatoria con distribución exponencial. Demuestra que
$$P(X > s + x \mid X > s) = P(X > x),$$
(esta propiedad se la conoce como *falta de memoria*). Calcula su esperanza y su varianza.

2. Sean X e Y dos distribuciones independientes de Poisson con parámetro λ y μ respectivamente.

   a) Calcula $P(X = m \mid X + Y = n)$.

   b) Calcula $E[X \mid X + Y]$ y $Var[X \mid X + Y]$.

3. Calcula la duración esperada de un juego, dentro del esquema general del problema de la ruina del jugador, cuando uno de los oponentes es, por ejemplo, un casino (infinitamente rico).

4. Supongamos el proceso de Bernoulli dado por $P(Y_i = 1) = p$ y $P(Y_i = 0) = 1 - p$ para las variables $\{Y_i\}$ *i.i.d.* Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Denominemos *llegadas* a la ocurrencia $\{Y_i = 1\}$ de los sucesos del proceso de Bernoulli. Demuestra que el tiempo T hasta la primera llegada sigue una distribución geométrica.

5. Siendo $\{X_i\}_{i\geq 1} \sim Bernoulli(1/2)$ sucesión de *v.a.i.i.d.*, se define el proceso:
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad n \geq 1 \\ S_0 &= 0 \end{aligned}$$

   a) Escribe la distribución marginal de S_{10}.

   b) Halla $E[S_{10} \mid S_2 = 2, S_1 = 0]$.

   c) Halla $P(S_{10} = 5, S_2 = 2)$.

6. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ un proceso de Bernoulli con espacio de estados $S = \{0, 1\}$ y probabilidad de éxito $p = P(X_n = 1)$.

   a) Calcula $P(X_2 = 0, X_5 = 1, X_8 = 1)$.

   b) Da una expresión explícita para calcular la distribución finita del proceso.

7. En un proceso de Poisson de parámetro λ calcula $P(N(s) = 1, N(t) = 2)$ para todo $0 < s < t$.

8. Los coches pasan por una carretera comarcal y dejan a un lado un cobertizo con un ritmo de un coche cada dos minutos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 coches pasen delante del cobertizo en 10 minutos?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 coches pasen delante del cobertizo en 10 minutos, dado que en los primeros 5 minutos de ese tiempo pasó un coche delante del cobertizo?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los periodos 10.00—10.02, 10.02—10.04, 10.04—10.06, 10.06—10.08, 10.08—10.10 al menos un coche pase delante del cobertizo?

   d) ¿Se puede considerar que un proceso de Poisson es un buen modelo para el caso de una carretera con tráfico denso?

9. Una hamburguesería tiene tres entradas: una frontal, una trasera y una puerta lateral. El dueño piensa que durante la hora de la comida los clientes llegan a un ritmo de uno por minuto por la puerta frontal, uno cada dos minutos por la puerta trasera y uno cada tres minutos por la puerta lateral. Se modeliza el proceso de las entradas como un proceso de Poisson. El local abre a las 12:00. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

   a) Ningún cliente llega por la puerta frontal a las 12:06.

   b) Ningún cliente llega por ninguna de las puertas a las 12:06.

   c) Llegan 5 clientes al local a las 12:06, dado que exactamente dos entraron por la puerta delantera.

   d) Al menos entraron por cada puerta dos clientes a las 12:06.

   e) El segundo cliente que entró en el local lo hizo a través de la puerta trasera.