# Tema 2. Contraste de hipótesis en una población

## Contenidos

- Introducción, las hipótesis nula y alternativa
- El procedimiento de contraste de hipótesis
- Errores de Tipo I y Tipo II, potencia del contraste
- Estadísticos del contraste, nivel de significación y regiones de aceptación/rechazo en contrastes bilaterales y unilaterales
- Contrastes de hipótesis: procedimiento
- p-valor
- Contrastes bilaterales e intervalos de confianza
- Ejemplos para distintos parámetros
- Potencia y tamaño muestral

# Tema 2. Contraste de hipótesis en una población

## Objetivos de aprendizaje

Al final de este tema debieras ser capaz de:

- Llevar a cabo un contraste de hipótesis sobre una población
- Formular las hipótesis nula y alternativa de un contraste
- Entender los errores de tipo I y tipo II, definir el nivel de significación, definir la potencia del contraste
- Seleccionar un estadístico del contraste adecuado e identificar las regiones críticas correspondientes a contrastes unilaterales y bilaterales
- Utilizar el p-valor para llevar a cabo un contraste
- Conocer la relación entre un contraste bilateral y un intervalo de confianza asociado
- Calcular la potencia de un contraste y encontrar el tamaño muestral necesario para obtener una potencia dada

# Tema 2. Contraste de hipótesis en una población

## Referencias

- Newbold, P. "Estadística para administración y economía"
  - Capítulo 9 (9.1-9.5)
- Ross, S. "Introducción a la Estadística"
  - Capítulo 9

# Contrastes de hipótesis: introducción

Un contraste de hipótesis es un procedimiento que:

- se basa en datos muestrales
- para proporcionarnos información cara a tomar una decisión
- sobre la validez de una conjetura o hipótesis sobre una población $X$; típicamente, el valor de un parámetro de la población $\theta$ ($\theta$ puede ser uno cualquiera de los parámetros que hemos considerado hasta ahora: $\mu$, $p$, $\sigma^2$, etc)

Esta hipótesis a confrontar se conoce como la hipóthesis nula ($H_0$):

- Podemos pensar en ella como la hipótesis considerada correcta (antes de llevar a cabo el test)
- Será mantenida a menos que la muestra aporte suficiente evidencia contraria
- La información recogida en la muestra se emplea para confrontar (o contrastar) esta hipótesis

# La hipótesis nula: ejemplos

1. Un fabricante de paquetes de cereales afirma que, en promedio, cada paquete pesa al menos 400 g. Quieres contrastar esta información a partir de los pesos de los paquetes en una muestra aleatoria.
   Población: $X$ = 'peso de un paquete de cereales (en g)'

   Hipótesis nula, $H_0: \ \mu \geq \overbrace{400}^{\mu_0}$ MAS

   ¿Proporciona la muestra suficiente evidencia para dudar de (rechazar) $H_0$?
2. Una compañía recibe envíos de componentes, que acepta si el porcentaje de componentes defectuosos es como máximo del 5%. La decisión se basa en una muestra aleatoria de estos componentes.
   Población: $X = 1$ si un componente es defectuoso y 0 en otro caso
   $X \sim Bernoulli(p)$, $p$ = proporción de componentes defectuosos en todo el envío

   Hipótesis nula, $H_0: \ p \leq \overbrace{0.05}^{p_0}$ MAS

   ¿Proporciona la muestra evidencia suficiente para rechazar $H_0$?

# La hipótesis nula, $H_0$

- Define la hipótesis a contrastar
- Se asume inicialmente que la hipótesis nula es correcta (semejante a suponer inocencia a menos que se pruebe la culpa)
- Habitualmente corresponde al estatus quo
- $\boxed{\text{Su definición matemática siempre contiene los símbolos '$=$', '$\leq$' o '$\geq$'}}$ (conjunto cerrado)
- Puede ser rechazada como resultado del contraste, o no serlo
- Hipótesis simples:

  $$H_0: \ \mu = \overbrace{5}^{\mu_0}, \ H_0: \ p = \overbrace{0.6}^{p_0}, \ H_0: \ \sigma^2 = \overbrace{9}^{\sigma_0^2} \ \boxed{\text{En general: } H_0: \ \theta = \theta_0}$$

  Espacio paramétrico asociado a esta hipótesis nula: $\Theta_0 = \{\theta_0\}$
- Hipótesis compuestas (especificadas mediante un rango de valores):

  $$H_0: \ \mu \leq \overbrace{5}^{\mu_0}, \ H_0: \ p \geq \overbrace{0.6}^{p_0} \ \boxed{\text{En general: } H_0: \ \theta \leq \theta_0 \text{ ó } H_0: \ \theta \geq \theta_0}$$

  Espacio paramétrico asociado a esta hipótesis nula: $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0]$ o $\Theta_0 = [\theta_0, \infty)$

# Hipótesis alternativa, $H_1$

Si la hipótesis nula no es válida, alguna alternativa debe ser correcta. Para realizar el contraste, el investigador debe especificar una hipótesis alternativa frente a la que se contrasta la hipótesis nula.

La hipótesis alternativa $H_1$:

- Es la opuesta a la hipótesis nula
- Habitualmente confronta el estatus quo
- Su formulación matemática no contiene los símbolos '$=$', '$\leq$' o '$\geq$'
- Puede ser soportada por los datos o no serlo
- Habitualmente es la hipótesis por la que se inclina el investigador
- Hipótesis unilaterales:

$$\text{(cola derecha) } H_1: \ \mu > 5, \ \text{(cola izquierda) } H_0: \ p < 0.6$$

$$\boxed{\text{En general: } H_1: \ \theta > \theta_0 \text{ ó } H_1: \ \theta < \theta_0}$$

Espacio paramétrico bajo esta alternativa: $\Theta_1 = (\theta_0, \infty)$ ó $\Theta_1 = (-\infty, \theta_0)$

- Hipótesis bilaterales:

$$H_1: \ \sigma^2 \neq 9 \qquad \boxed{\text{En general: } H_1: \ \theta \neq \theta_0}$$

Espacio paramétrico bajo esta alternativa: $\Theta_1 = (-\infty, \theta_0) \cup (\theta_0, \infty)$

# La hipótesis alternativa: ejemplos

1. Un fabricante de paquetes de cereales afirma que, en promedio, cada paquete pesa al menos 400 g. Quieres contrastar esta información a partir de los pesos de los paquetes en una muestra aleatoria.
   Población: $X =$ 'peso de un paquete de cereales (en g)'
   Hipótesis nula, $H_0: \ \mu \geq 400$ frente a

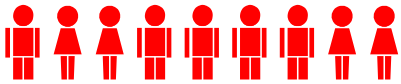
   Hipótesis alternativa, $H_1: \ \mu < 400$ MAS

   ¿Proporciona la información de la muestra suficiente evidencia en contra de $H_0$ y a favor de $H_1$?
2. Una compañía recibe envíos de componentes, que acepta si el porcentaje de componentes defectuosos es como máximo del 5%. La decisión se basa en una muestra aleatoria de estos componentes.
   Población: $X = 1$ si un componente es defectuoso y 0 en otro caso
   $X \sim Bernoulli(p)$, $p =$ proporción de componentes defectuosos en el envío
   Hipótesis nula, $H_0: \ p \leq 0.05$ frente a

   Hipótesis alternativa, $H_1: \ p > 0.05$ MAS

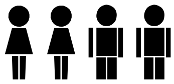
   ¿Proporciona la información de la muestra suficiente evidencia contra $H_0$ y a favor de $H_1$?

# Procedimiento de contraste de hipótesis



Población:
$X$ = 'altura de un estudiante de la UC3M (en m)'
Afirmación: En promedio, los estudiantes miden menos de 1.6 m $\Rightarrow$
Hipótesis:

$$\boxed{H_0: \ \mu \leq 1.6 \text{ frente a } H_1: \ \mu > 1.6}$$

MAS 

Muestra: Supongamos que la media muestral es 1.65 m, $\bar{x} = 1.65$

¿Es extraño observar una media muestral igual a $\bar{x} = 1.65$ si la media de la población es $\mu \leq 1.6$?

Si <u>no</u> es razonable, <u>rechazamos</u> la hipótesis nula en favor de la alternativa.

# Procedimiento de contraste de hipótesis

- Una vez especificadas las hipótesis nula y alternativa y recogida la información muestral, se toma una decisión sobre la hipótesis nula (rechazar o no rechazar $H_0$).
- La regla de decisión se basa en el valor de una "distancia" entre los datos muestrales de que disponemos y aquellos valores que tienen alta probilidad si se cumple la hipótesis nula.
- Esta distancia se calcula como el valor de un estadístico del contraste, relacionado con las cantidades pivotales mencionadas en el Tema 1. Más adelante se mencionarán casos específicos.
- Para cualquier decisión que pueda tomarse, existe la posibilidad de llegar a una conclusión equivocada sobre el valor del parámetro de la población, porque no disponemos más que de una muestra aleatoria y con ella no podemos tener la certeza de que la hipótesis nula sea correcta o no.
- Existen dos posibles estados en la naturaleza y por tanto se pueden cometer dos errores: los errores de Tipo I y de Tipo II.

# Errores de Tipo I y de Tipo II, potencia

- Error de Tipo I: rechazar una hipótesis nula correcta. El error de Tipo I se considera importante. La probabilidad de un error de Tipo I es igual a $\alpha$ y se denomina nivel de significación,

$$\alpha = P(\text{rechazar la nula} | H_0 \text{ es correcta})$$

- Error de Tipo II: no rechazar una hipótesis nula incorrecta. La probabilidad de un error de Tipo II es igual a $\beta$.

$$\beta = P(\text{no rechazar la nula} | H_1 \text{ es correcta})$$

- potencia: probabilidad de rechazar una hipótesis nula (cuando es incorrecta).

$$\text{potencia} = 1 - \beta = P(\text{rechazar la nula} | H_1 \text{ es correcta})$$

| | Situación actual | |
|---|---|---|
| Decisión | $H_0$ correcta | $H_0$ incorrecta |
| No Rechazar $H_0$ | Sin error $(1-\alpha)$ | Error de Tipo II $(\beta)$ |
| Rechazar $H_0$ | Error de Tipo I $(\alpha)$ | Sin error $(1-\beta = \text{potencia})$ |

# Errores de Tipo I y de Tipo II, potencia

- Los errores de Tipo I y de Tipo II no se pueden cometer simultáneamente
  - El error de Tipo I solo puede darse si $H_0$ es $\boxed{\text{correcta}}$
  - El error de Tipo II solo puede darse si $H_0$ es $\boxed{\text{incorrecta}}$
- Si la probabilidad del error de Tipo I, $\alpha \Uparrow$, entonces la probabilidad del error de Tipo II, $\beta \Downarrow$
- Si todo lo demás no cambia:
  - $\beta \Uparrow$ cuando la diferencia entre el valor supuesto para el parámetro y su valor real $\Downarrow$
  - $\beta \Uparrow$ cuando $\alpha \Downarrow$
  - $\beta \Uparrow$ cuando la variabilidad en la población $(\sigma) \Uparrow$
  - $\beta \Uparrow$ cuando el tamaño muestral $(n) \Downarrow$
  - Para $\theta \in \Theta_1$

$$\text{potencia}(\theta) = 1 - \beta(\theta)$$

  - Para $\theta \in \Theta_0$

$$\text{potencia}(\theta) \leq \alpha$$

# Estadístico del contraste, nivel de significación y región de rechazo

## Estadístico del contraste, $T$

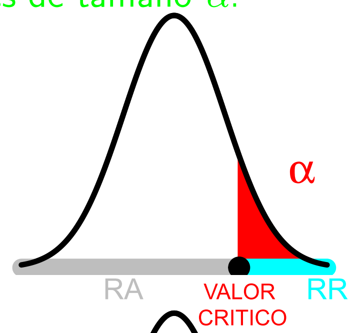
- Nos permite decidir si es "probable" o "improbable" que se observen los datos muestrales, suponiendo que la hipótesis nula sea cierta.
- Es la cantidad pivotal vista en el Tema 1, calculada bajo la hipótesis nula.
- La decisión del contraste de hipótesis se basa en el valor observado del estadístico del contraste, $t$.
- Si los datos muestrales proporcionan evidencia contraria a la hipótesis nula, el valor observado del estadístico del contraste debiera ser "extremo", esto es, muy poco probable. En otro caso, este valor debiera ser "usual".
- Distinguimos entre valores "usuales" y "extremos" sobre la base de:
  - la distribución del estadístico del contraste para la muestra,
  - el nivel de significación $\alpha$, que define la llamada región de rechazo o crítica y la región de aceptación.

# Estadístico del contraste, significación y región de rechazo

Región de rechazo (RR) y de aceptación (RA) en contrastes de tamaño $\alpha$:

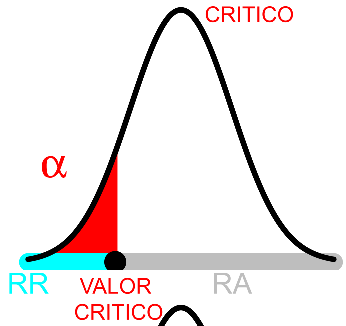
Contraste unilateral derecho $\boxed{H_1 : \ \theta > \theta_0}$

$\mathrm{RR}_\alpha = \{t : t > T_\alpha\}$ $\mathrm{RA}_\alpha = \{t : t \leq T_\alpha\}$



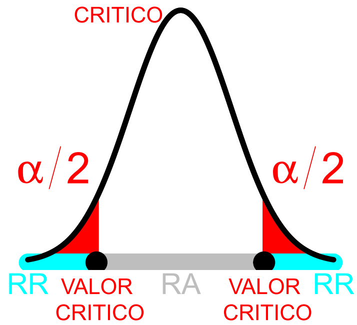

Contraste unilateral izquierdo $\boxed{H_1 : \ \theta < \theta_0}$

$\mathrm{RR}_\alpha = \{t : t < T_{1-\alpha}\}$ $\mathrm{RA}_\alpha = \{t : t \geq T_{1-\alpha}\}$




Contraste bilateral $\boxed{H_1 : \ \theta \neq \theta_0}$

$\mathrm{RR}_\alpha = \{t : t < T_{1-\alpha/2} \text{ o } t > T_{\alpha/2}\}$
$\mathrm{RA}_\alpha = \{t : T_{1-\alpha/2} \leq t \leq T_{\alpha/2}\}$



# Estadísticos del contraste

Sea $\underline{X}_n$ una m.a.s. de una población $X$ con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$, $\alpha$ un nivel de significación, $z_\alpha$ el cuantil $\alpha$ de N(0,1), $\mu_0$ la media de la población bajo $H_0$, etc.

| Parámetro | Hipótesis | Estadístico contraste | RR$_\alpha$ contraste bilateral |
|---|---|---|---|
| Media | Datos normales<br>Varianza conocida | $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ | $\left\{ z : \overbrace{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}^{z} < z_{1-\alpha/2} \text{ o } \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \right\}$ |
| | Datos no normales<br>Muestra grande | $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim_{ap.} N(0,1)$ | $\left\{ z : \frac{\bar{x}-\mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2} \text{ o } \frac{\bar{x}-\mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \right\}$ |
| | Datos Bernoulli<br>Muestra grande | $\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim_{ap.} N(0,1)$ | $\left\{ z : \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < z_{1-\alpha/2} \text{ o } \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{\alpha/2} \right\}$ |
| | Datos normales<br>Varianza desconocida | $\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ | $\left\{ t : \overbrace{\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}}^{t} < t_{n-1;1-\alpha/2} \text{ o } \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1;\alpha/2} \right\}$ |
| Varianza | Datos normales | $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ | $\left\{ \chi^2 : \overbrace{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}}^{\chi^2} < \chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \text{ o } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\alpha/2} \right\}$ |
| Desv. Típ. | Datos normales | $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ | $\left\{ \chi^2 : \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \text{ o } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\alpha/2} \right\}$ |

Pregunta: ¿Cómo definirías $RR_\alpha$ para contrastes unilaterales?

# Contraste de hipótesis: procedimiento

1. Especificar las hipótesis nula y alternativa.
2. Calcular el valor observado del estadístico del contraste (ver transparencia anterior).
3. Para un nivel de significación $\alpha$ dado, definir la región de rechazo ($RR_\alpha$).
   - Rechazar $H_0$, la hipótesis nula, si el valor del estadístico del contraste está en $RR_\alpha$ y no rechazar $H_0$ en otro caso.
4. Escribir las implicaciones para nuestro caso en una frase.

## Contraste unilateral para la media de datos normales con varianza conocida: ejemplo

**Ejemplo:** 9.1 (Newbold) Los pesos de los rodamientos fabricados en un proceso siguen una distribución normal con media 250 g. y desviación típica 5 g. Tras reajustar el mismo, el encargado sospecha que el peso promedio ha aumentado, pero su desviación típica no ha cambiado. Se selecciona una muestra aleatoria simple de dieciséis rodamientos, con un peso medio de 251.9 g. ¿Tiene razón el encargado? Lleva a cabo el contraste para un nivel de significación del 5%.

Población:
$X =$ "peso de un rodamiento (en g)"
$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 5^2)$

MAS: $n = 16$

Muestra: $\bar{x} = 251.9$

Objetivo: contrastar

$$\boxed{H_0: \ \mu = \overbrace{250}^{\mu_0} \text{ frente a } H_1: \ \mu > 250}$$

(contraste unilateral)

Estadístico del contraste:
$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
Valor observado del estadístico:

$$\sigma = 5 \qquad \mu_0 = 250$$
$$n = 16 \qquad \bar{x} = 251.9$$
$$\begin{aligned} z &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \\ &= \frac{251.9 - 250}{5/\sqrt{16}} = 1.52 \end{aligned}$$

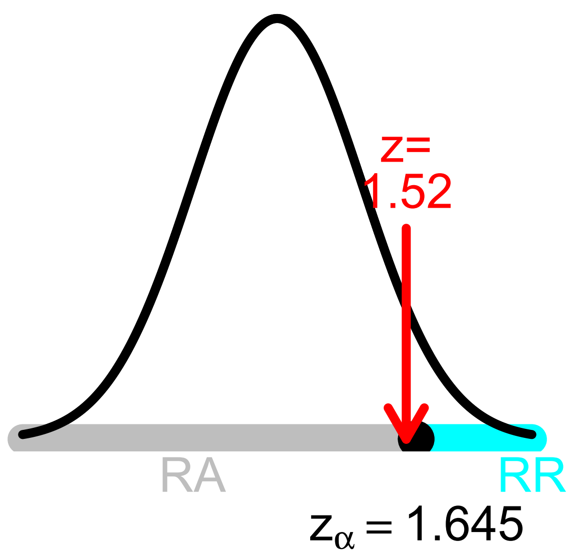
## Contraste unilateral para la media de datos normales con varianza conocida: ejemplo

**Ejemplo:** 9.1 (cont.)
Región de rechazo (o región crítica):

$$\begin{aligned} RR_{0.05} &= \{z : \ z > z_{0.05}\} \\ &= \{z : \ z > 1.645\} \end{aligned}$$

Como $z = 1.52 \notin RR_{0.05}$ no rechazamos $H_0$ a un nivel de significación del 5%.

Densidad N(0,1)




Conclusión: Los datos muestrales no proporcionan suficiente evidencia para rechazar la afirmación de que el peso promedio de los rodamientos es 250 g.

# Definición de p-valor

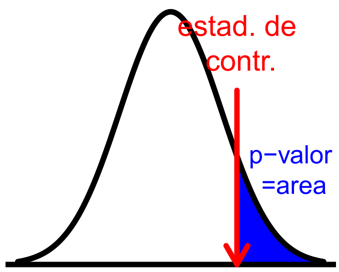
- Es la probabilidad de que se obtenga un valor del estadístico del contraste que sea al menos tan extremo ($\leq$ o $\geq$) como el observado, suponiendo que $H_0$ sea cierta.
- Se conoce también como el nivel de significación observado
- Es el menor valor de $\alpha$ para el que se puede rechazar $H_0$.
- Se puede emplear en el paso 3) del procedimiento de contraste de hipótesis con la regla siguiente:
  - Si el p-valor $< \alpha$, rechazamos $H_0$
  - Si el p-valor $\geq \alpha$, no rechazamos $H_0$
- Como resumen:
  - p-valores "pequeños" proporcionan evidencia en contra de $H_0$
  - p-valores "grandes" proporcionan evidencia a favor de $H_0$

# p-valor

Cálculo del p-valor: $t$ valor observado del estadístico del contraste $T$:

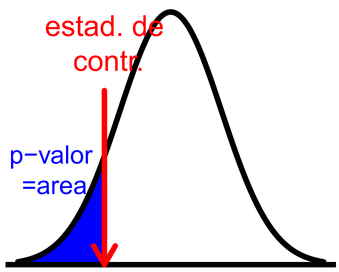
Contraste unilateral derecho $\boxed{H_1 : \ \theta > \theta_0}$

p-valor $= P(T \geq t)$



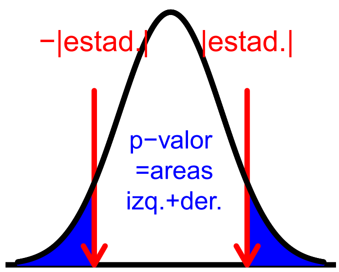

Contraste unilateral izquierdo $\boxed{H_1 : \ \theta < \theta_0}$

p-valor $= P(T \leq t)$




Contraste bilateral $\boxed{H_1 : \ \theta \neq \theta_0}$

p-valor $= P(T \leq -|t|) + P(T \geq |t|)$



## p-valor: ejemplo

**Ejemplo:** 9.1 (cont.)

Población:

$X$ = "peso de un rodamiento (en g)"

$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 5^2)$

MAS: $n = 16$

Muestra: $\bar{x} = 251.9$

Objetivo: contrastar

$$\boxed{H_0: \ \mu = \overbrace{250}^{\mu_0} \text{ frente a } H_1: \ \mu > 250}$$

(contraste unilateral)

Estadístico del contraste:

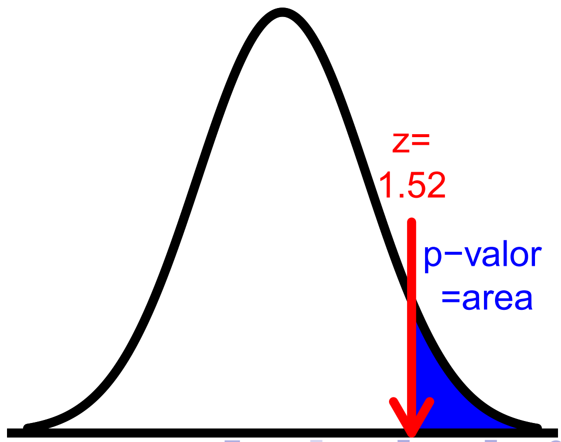
$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Valor observado del estadístico: $z = 1.52$

densidad N(0,1)

$$\begin{aligned} \text{p-valor} &= P(Z \geq z) = P(Z \geq 1.52) \\ &= 0.0643 \text{ donde } Z \sim N(0,1) \end{aligned}$$

Como se cumple que
p-valor $= 0.0643 \geq \alpha = 0.05$
no rechazamos $H_0$ (pero rechazaríamos para cualquier $\alpha$ mayor que 0.0643, por ejemplo, $\alpha = 0.1$).




## El *p*-valor y la probabilidad de la hipótesis nula[1]

- El *p*-valor:
  - no es la probabilidad de $H_0$ ni la del error de Tipo I, $\alpha$;
  - se puede utilizar como un estadístico del contraste comparando su valor con el de $\alpha$ (i.e. rechazar $H_0$ si $p$-valor $< \alpha$).
- Queremos responder la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de la hipótesis nula dadas las observaciones?
  - Recordemos que definimos el *p*-valor como la probabilidad de obtener las observaciones (o valores mas extremos) dada la hipótesis nula.
  - No podemos responder de manera exacta,
  - Pero bajo condiciones generales y asumiendo que sin los datos $\Pr(H_0) = \Pr(H_1) = 1/2$, entonces para *p*-valores, *p*, tales que $p < 0.36$:

$$\Pr(H_0 | \text{Observaciones}) \geq \frac{-ep\ln(p)}{1 - ep\ln(p)}.$$

[1]Selke, Bayarri and Berger, The American Statistician, 2001

## El $p$-valor y la probabilidad de la hipótesis nula

La siguiente tabla permite calibrar el $p$-valor como una función de la probabilidad de la hipótesis nula:

| $p$-valor | $\Pr(H_0 \mid \text{Observaciones}) \geq$ |
|---|---|
| 0.1 | 0.39 |
| 0.05 | 0.29 |
| 0.01 | 0.11 |
| 0.001 | 0.02 |
| 0.00860 | 0.1 |
| 0.00341 | 0.05 |
| 0.00004 | 0.01 |
| $\leq$ 0.00001 | 0.001 |

- Para un $p$-valor igual a 0.05 la hipótesis nula tiene una probabilidad de al menos el 29% de ser cierta.
- Mientras que si queremos que la probabilidad de que sea cierta no supere el 5%, el $p$-valor tiene que ser más pequeño que 0.0034.

## Intervalos de confianza y contrastes bilaterales: dualidad

Un contraste bilateral a un nivel de significación $\alpha$ puede realizarse a partir de un intervalo (simétrico) con nivel de confianza $100(1-\alpha)\%$ de la manera siguiente:

1. Especificar las hipótesis nula y alternativa:

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \quad \text{frente a} \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0$$

2. Calcular un intervalo de confianza al $100(1-\alpha)\%$ para $\theta$.
3. Si $\theta_0$ no pertenece a este intervalo, rechazamos $H_0$.
   Si $\theta_0$ pertenece al intervalo, no rechazamos $H_0$.
4. Escribir las implicaciones para nuestro caso en una frase.

## Contraste bilateral para la media con varianza conocida: ejemplo

**Ejemplo:** 9.2 (Newbold) Un taladro produce agujeros cuyos diámetros siguen una distribución normal con media 2 cm y desviación típica 0.06 cm. Para verificar su correcto funcionamiento se miden aleatoriamente nueve taladros, con un diámetro medio de 1.95 cm. Realiza un contraste bilateral para un nivel de significación del 5% utilizando ICs.

Población:
$X =$ "diámetro de un agujero (en cm)"
$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 0.06^2)$

MAS: $n = 9$

Muestra: $\bar{x} = 1.95$

Objetivo: contrastar

$$\boxed{H_0 : \ \mu = \overbrace{2}^{\mu_0} \ \text{frente a} \ H_1 : \ \mu \neq 2}$$

(contraste bilateral)

Intervalo de confianza al $100(1-\alpha)\% = 95\%$ para $\mu$:

$$\begin{aligned} IC_{0.95}(\mu) &= \left(\bar{x} \mp 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left(1.95 \mp 1.96 \frac{0.06}{\sqrt{9}}\right) \\ &= (1.9108, 1.9892) \end{aligned}$$

Como $\mu_0 = 2 \notin CI_{0.95}(\mu)$, rechazamos $H_0$ a un nivel de significación del 5%.

## Contraste bilateral para la proporción: ejemplo

**Ejemplo:** 9.6 (Newbold) En una muestra aleatoria de 199 socios auditores de empresas de auditoría americanas, 104 socios se mostraron de acuerdo con la afirmación: "Los flujos de caja operativos son una medida válida de rentabilidad". Contrasta al 10% frente a una alternativa bilateral la hipótesis nula de que la mitad de los miembros de la población estarían de acuerdo con esta afirmación.

Población:
$X = 1$ si un socio está de acuerdo con la afirmación y 0 en otro caso
$X \sim Bernoulli(p)$

MAS: $n = 199$ $\boxed{n \text{ grande}}$

Muestra: $\hat{p} = \frac{104}{199} = 0.523$

Objetivo: contrastar

$$\boxed{H_0 : \ p = \overbrace{0.5}^{p_0} \ \text{frente a} \ H_1 : \ p \neq 0.5}$$

(contraste bilateral)

Estadístico del contraste:
$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim_{aprox.} N(0,1)$
Valor observado del estadístico:

$p_0 = 0.5$

$n = 199$ $\quad$ $\hat{p} = 0.523$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \\ &= \frac{0.523-0.5}{\sqrt{0.5(1-0.5)/199}} \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

## Contraste bilateral para la proporción: ejemplo

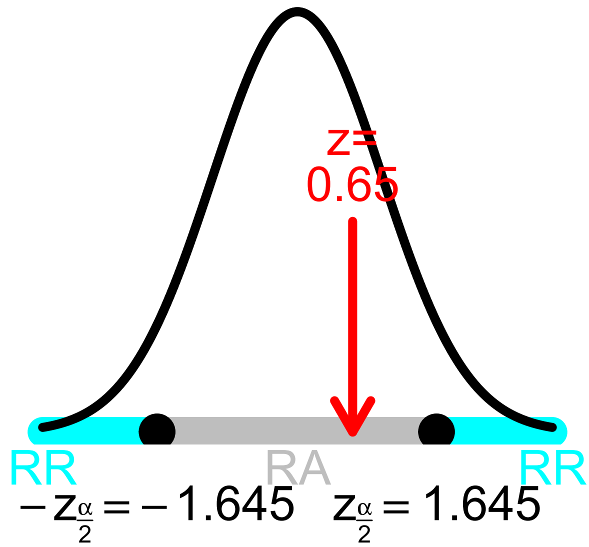
**Ejemplo:** 9.6 (cont.)

Región de rechazo o región crítica:

$$
\begin{aligned}
RR_{0.10} &= \{z :\ z > z_{0.05}\} \cup \\
&\quad\ \{z :\ z < -z_{0.05}\} \\
&= \{z :\ z > 1.645\} \cup \\
&\quad\ \{z :\ z < -1.645\}
\end{aligned}
$$

Como $z = 0.65 \notin RR_{0.10}$ no rechazamos $H_0$ a un nivel de significación del 10%.

Densidad N(0,1)




Conclusión: Los datos muestrales no dan evidencia suficiente para dudar que la mitad de los socios auditores piensen que el flujo de caja operacional es una medida válida de rentabilidad.

## Contraste unilateral, media con var. desconocida: ejemplo

**Ejemplo:** 9.4 (Newbold, modificado) Una cadena de centros comerciales cree que el aumento de ventas entre Noviembre y Diciembre es del 20%. Una muestra aleatoria de seis centros tuvo incrementos de ventas de 19.2, 18.4, 19.8, 20.2, 20.4, 19.0. Suponiendo la población normal, contrasta que el incremento promedio es al menos del 20% frente a una alternativa unilateral, para $\alpha = 10\%$. Emplea el $p$-valor.

Población:

$X =$ "incremento de ventas en un centro entre Nov. y Dic. (en %)"

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\boxed{\sigma^2 \text{ desconocida}}$

MAS: $n = 6$ $\boxed{n \text{ pequeño}}$

Muestra: $\bar{x} = \frac{117}{6} = 19.5$

$s^2 = \frac{2284.44 - 6(19.5)^2}{6-1} = 0.588$

Objetivo: contrastar

$$\boxed{H_0 :\ \mu \geq \overbrace{20}^{\mu_0} \text{ frente a } H_1 :\ \mu < 20}$$

(contraste unilateral)

Estadístico del contraste:

$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Valor observado del estadístico:

$\mu_0 = 20$ $\quad$ $n = 6$

$\bar{x} = 1.95$ $\quad$ $s = \sqrt{0.588} = 0.767$

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \\
&= \frac{19.5 - 20}{0.767/\sqrt{6}} = -1.597
\end{aligned}
$$

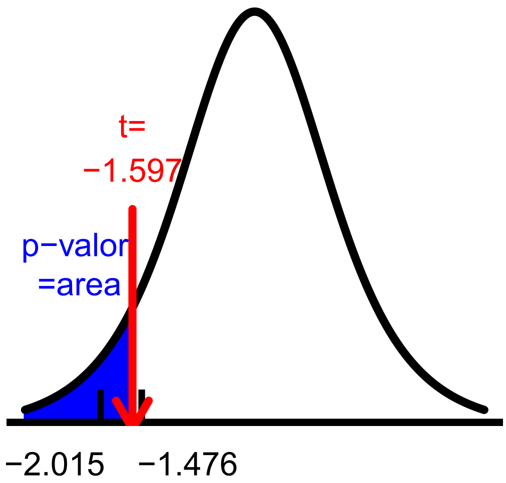
# Contraste unilateral, media con var. desconocida: ejemplo

**Ejemplo:** 9.4 (cont.)

$$\text{p-valor} = P(T \leq -1.597)$$
$$\in (0.05, 0.1) \text{ porque}$$
$$\overbrace{-2.015}^{-t_{5;0.05}} < -1.597 < \overbrace{-1.476}^{-t_{5;0.10}}$$

Dado que p-valor $< \alpha = 0.1$, rechazamos la hipótesis nula a este nivel.

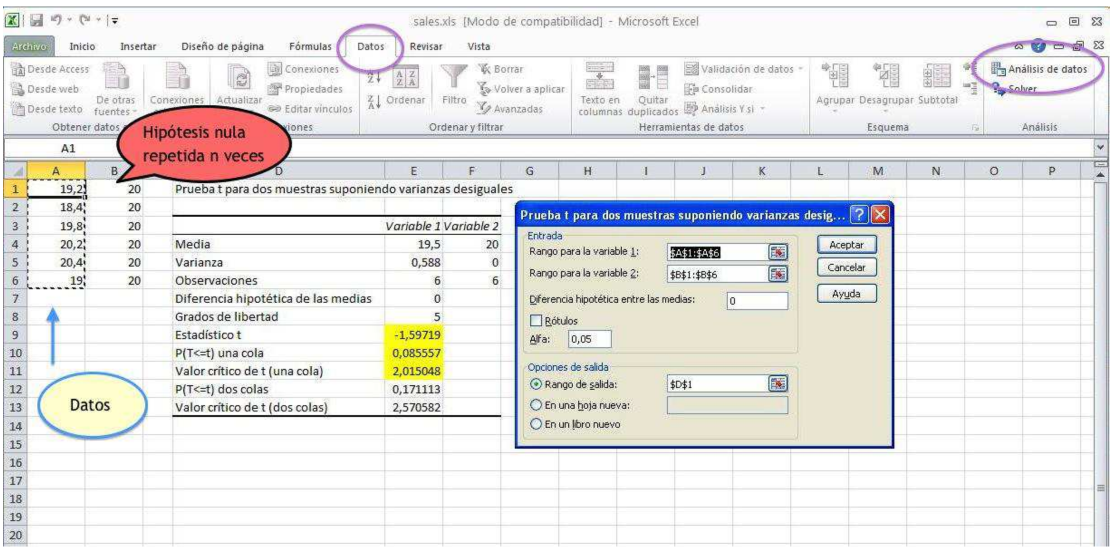
Densidad $t_{n-1}$




Conclusión: Los datos muestrales proporcionan suficiente evidencia para rechazar que el incremento promedio de las ventas haya sido al menos del 20%.
Interpretación del p-valor: si la hipótesis nula fuese cierta, la probabilidad de que hubiésemos obtenido estos datos muestrales sería como máximo del 10%, lo que es bastante improbable, y por tanto rechazamos la hipótesis nula.

# Contraste unilateral para la media con varianza desconocida: ejemplo

**Ejemplo:** 9.4 (cont.) en Excel: Selecciona la opción de menú: Datos, submenu: Análisis de datos, escoge la función: prueba t para dos muestras suponiendo varianzas desiguales.
Columna A (datos), Columna B ($n$ repeticiones de $\mu_0 = 20$), en amarillo (estadístico observado $t$, p-valor y $t_{n-1;\alpha}$).



# Contraste unilateral para la varianza: ejemplo

**Ejemplo:** 9.5 (Newbold) Para cumplir con la normativa, la varianza del nivel de impurezas en tanto por ciento en los envíos de un cierto producto químico no puede superar el valor 4. Una muestra aleatoria de veinte envíos ha proporcionado una cuasi-varianza muestral del nivel de impurezas de 5.62.

a) Lleva a cabo un contraste de hipótesis adecuado ($\alpha = 0.1$).

b) Calcula la potencia del contraste. ¿Cuál es la potencia para $\sigma_1^2 = 7$?

c) ¿Qué tamaño muestral garantizaría una potencia de 0.9 para $\sigma_1^2 = 7$?

Población:
$X =$ "nivel de impurezas del producto en un envío (en %)"
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

MAS: $n = 20$

Muestra: $s^2 = 5.62$

Objetivo: contrastar

$$\boxed{H_0: \ \sigma^2 \leq \overbrace{4}^{\sigma_0^2} \ \text{frente a } H_1: \ \sigma^2 > 4}$$

(contraste unilateral)

Estadístico del contraste:
$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Valor observado del estadístico:

$\sigma_0^2 = 4 \qquad n = 20$

$s^2 = 5.62$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)5.62}{4} = 26.695$$

# Contraste unilateral para la varianza: ejemplo

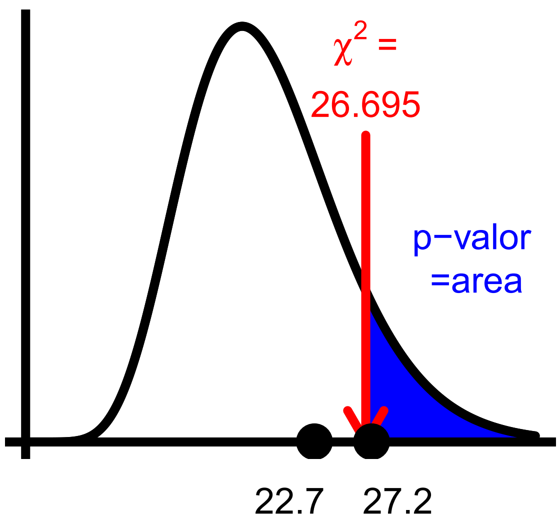
**Ejemplo:** 9.5 a) (cont.)

p-valor $= P(\chi^2 \geq 26.695)$
$\in (0.1, 0.25)$ porque

$$\underbrace{22.7}^{\chi^2_{19;0.25}} < 26.695 < \overbrace{27.2}^{\chi^2_{19;0.1}}$$

Como el p-valor es mayor que $\alpha = 0.1$, no podemos rechazar la hipótesis nula a este nivel.

Densidad $\chi^2_{n-1}$




Conclusión: Los datos muestrales no proporcionan suficiente evidencia para rechazar la afirmación de que la varianza del porcentaje de impurezas en los envíos de este producto no es mayor que 4.

# Contraste unilateral para la varianza: potencia

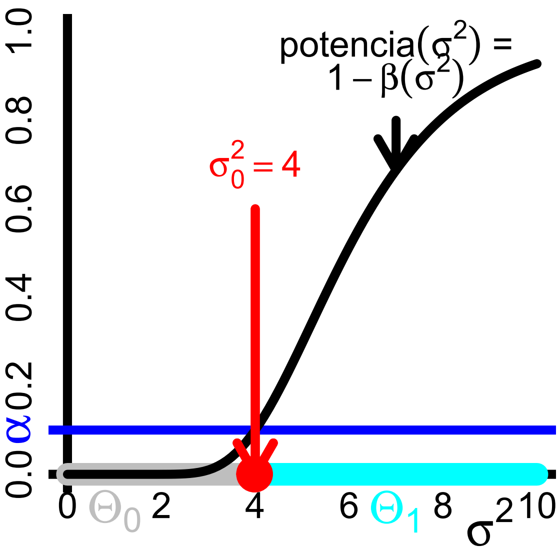
**Ejemplo:** 9.5 b) Recuerda que: $\boxed{\text{potencia} = P(\text{rechazar } H_0 | H_1 \text{ es cierta})}$

¿Cuándo rechazamos $H_0$?

$$\mathrm{RR}_{0.1} = \left\{ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;0.1} \right\}$$

$$= \left\{ (n-1)s^2 > \overbrace{\chi^2_{n-1;0.1} \cdot \sigma_0^2}^{27.2 \cdot 4 = 108.8} \right\}$$

potencia($\sigma^2$) función de $\sigma^2$




La potencia viene dada por:

$$\text{potencia}(\sigma_1^2) = P\left(\text{rechazar } H_0 | \sigma^2 = \sigma_1^2\right)$$

$$= P\left((n-1)s^2 > 108.8 | \sigma^2 = \sigma_1^2\right)$$

$$= P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_1^2} > \frac{108.8}{\sigma_1^2}\right)$$

$$= P\left(\chi^2 > \frac{108.8}{\sigma_1^2}\right) = 1 - F_{\chi^2}\left(\frac{108.8}{\sigma_1^2}\right)$$

($F_{\chi^2}$ es la función de distribución de $\chi^2_{n-1}$) Por tanto,
power(7) $= P\left(\chi^2 > \frac{108.8}{7}\right) = 0.6874$.

# Contraste unilateral para la varianza: cálculo de tamaño muestral

**Ejemplo:** 9.5 c)
De nuestros cálculos anteriores, sabemos que
$\text{potencia}(\sigma_1^2) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_1^2} > \frac{108.8}{\sigma_1^2}\right)$
Nuestro objetivo es $\boxed{\text{encontrar } n}$ tal que:

$$\text{potencia}(7) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{7} > \overbrace{\frac{108.8}{7}}^{15.54}\right) = 0.9$$

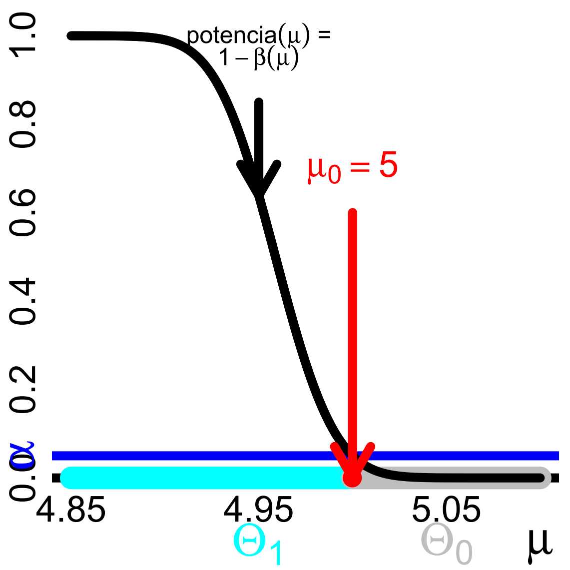
La última ecuación implica que queremos trabajar con una distribución $\chi^2_{n-1}$ cuyo cuantil 0.9 debe cumplir $\chi^2_{n-1;0.9} = 15.54$.

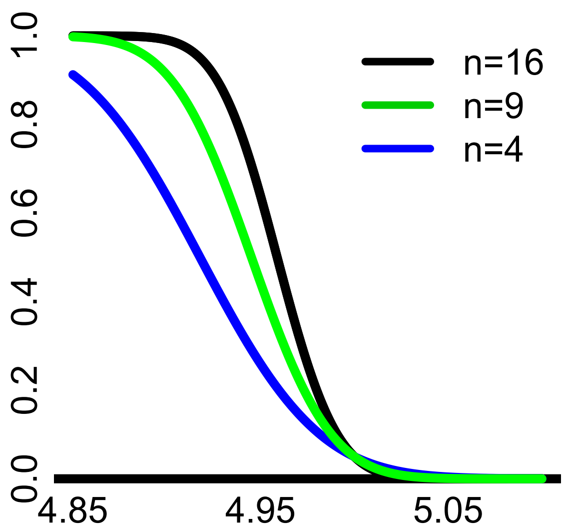
tabla chi-cuadrado $\boxed{\chi^2_{24;0.9} = 15.66 \approx 15.54} \Rightarrow n - 1 = 24$

Por tanto, si disponemos de 25 observaciones podremos detectar el valor alternativo $\sigma_1^2 = 7$ correctamente con una probabilidad del 90%.

## Otro ejemplo sobre potencia: contraste unilateral para la media, población normal y $\sigma^2$ conocida

- $\boxed{H_0 : \ \mu \geq \mu_0 \text{ frente a } H_1 : \ \mu < \mu_0}$ para $\alpha = 0.05$
- Supongamos $\mu_0 = 5$, $n = 16$, $\sigma = 0.1$
- Rechazamos $H_0$ si $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha = -1.645$, esto es, cuando $\bar{x} \geq 4.96$, por tanto
  potencia$(\mu_1) = P\left(Z < \frac{4.96-\mu_1}{0.1/\sqrt{16}}\right)$




## Otro ejemplo sobre potencia: contraste unilateral para la media, población normal y $\sigma^2$ conocida

La función potencia $= 1 - P$(error Tipo II) tiene las siguientes propiedades (si todo lo demás se mantiene constante):

- Cuanto más alejada esté la media verdadera $\mu_1$ del valor supuesto $\mu_0$, mayor es la potencia.
- Cuanto menor sea $\alpha$, menor es la potencia, esto es, si se reduce la probabilidad de un error de Tipo I, se incrementa la probabilidad de un error de Tipo II.
- Cuanto mayor es la varianza de la población, menor es la potencia (cuando tenemos más variabilidad, resulta más difícil detectar pequeñas desviaciones del valor real respecto del valor supuesto $\mu_0$).
- Cuanto mayor sea el tamaño muestral, mayor es la potencia del contraste (cuanto más información tengamos sobre la población, más sencillo resultará detectar pequeñas desviaciones del valor real respecto de la hipótesis nula).