

Capítulo 1

Álgebra lineal y matricial

1.1. Vectores y álgebra lineal

Un conjunto de n números reales (a_1, \dots, a_n) se puede representar:

- ✓ como un punto en el espacio n -dimensional;
- ✓ como un vector con punto inicial el origen de coordenadas $(0, \dots, 0)$, y punto final (a_1, \dots, a_n) .

Punto de \mathbb{R}^n :

$$A = (a_1, \dots, a_n), \quad O = (0, \dots, 0)$$

Vector de \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los a_i se denominan *componentes* del vector.

Suma de vectores:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Producto de un vector por un escalar:

$$k \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

Vector traspuesto:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}' = \dots$$

Combinación lineal (CL) de vectores: Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ vectores y $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ escalares. El vector siguiente es una *combinación lineal* de $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$:

$$\mathbf{a} = k_1 \mathbf{a}_1 + \dots + k_m \mathbf{a}_m$$

Vectores linealmente dependientes e independientes:

Sea $m \in \mathbb{N}$. Se dice que un conjunto de vectores $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ de \mathbb{R}^n es *linealmente dependiente*, si existen escalares $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos, tales que

$$k_1 \mathbf{a}_1 + \dots + k_m \mathbf{a}_m = \mathbf{o}, \quad (1.1)$$

Un conjunto de vectores se dice que es *linealmente independiente* si no es linealmente dependiente, es decir, si la única solución del sistema de ecuaciones (1.1) es

$$k_1 = \dots = k_m = 0.$$

Ejemplo 1.1 Razonar si los siguientes grupos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Producto escalar de dos vectores: El producto escalar de $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)'$ por $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)'$ es el número real

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Ejemplo 1.2 Contesta a las siguientes cuestiones:

(a) Para un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, ¿puede ser $\mathbf{a}'\mathbf{a} = 0$?

...

(b) ¿Crees que el producto escalar verifica la propiedad conmutativa?

...

(c) Sea $k \in \mathbb{R}$. ¿Crees que se cumple $(k\mathbf{a})'\mathbf{b} = k \mathbf{a}'\mathbf{b}$?

...

(d) Sean $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)'$ y $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)'$. ¿Crees que se verifica $(\mathbf{a} + \mathbf{b})'\mathbf{c} = \mathbf{a}'\mathbf{c} + \mathbf{b}'\mathbf{c}$?

...

Módulo o norma de un vector: El módulo de un vector $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es el número real

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

El módulo de un vector mide su longitud.

Teorema 1.1 Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces

(a) $|\mathbf{a}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{o}$,

(b) $|\mathbf{a}| > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \neq \mathbf{o}$,

(c) $|k\mathbf{a}| = |k||\mathbf{a}|$,

(d) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Vectores unitarios: Un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ con módulo $|\mathbf{a}| = 1$ se llama vector *unitario*.

Normalización de un vector: Si un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ no es unitario, se puede construir el vector

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}.$$

¿Es \mathbf{a}° unitario? ...

Ángulo entre dos vectores: Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{o}\}$. El *ángulo entre a y b* es el número real contenido entre 0 y π definido por

$$\text{ang}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\mathbf{a}'\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Si $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ ó $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, entonces el ángulo no está definido .

Ejemplo 1.3 Sean los vectores de \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el ángulo entre ellos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\mathbf{a} &= \dots, & \mathbf{b}'\mathbf{b} &= \dots, \\ |\mathbf{a}| &= \dots, & |\mathbf{b}| &= \dots, \\ \mathbf{a}'\mathbf{b} &= \dots, \\ \text{ang}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \dots. \end{aligned}$$

Vectores ortogonales: Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son *ortogonales* si

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = 0.$$

Según esta definición, ¿a qué vectores es ortogonal el vector nulo?...

Vector proyección: Sean \mathbf{a} y \mathbf{c} dos vectores, donde $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$. El vector *proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{c}* es

$$\mathbf{c}_a = (\mathbf{a}'\mathbf{c}^\circ)\mathbf{c}^\circ.$$

El módulo del vector proyección es

$$|\mathbf{c}_a| = |\mathbf{a}'\mathbf{c}^\circ||\mathbf{c}^\circ| = |\mathbf{a}'\mathbf{c}^\circ|.$$

Ejemplo 1.4 Calculamos la proyección de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} sobre \mathbf{c} , siendo

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular asimismo la proyección de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sobre \mathbf{c} . ¿Es igual a la suma de las proyecciones anteriores?

Vector que une dos puntos: Sean A, B dos puntos de \mathbb{R}^n . El vector con punto inicial A y punto final B es

$$\mathbf{v} = B - A.$$

Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de \mathbb{R}^n y los vectores con punto inicial $O = (0, \dots, 0)$: A cualquier punto A le corresponde un vector situado en el origen, $\mathbf{a} = A - O$, y viceversa.

Eje de coordenadas: Sea A un punto y \mathbf{c} un vector. El *eje de coordenadas* con *punto origen* A y *vector director* \mathbf{c} es la recta que pasa por A , con vector director \mathbf{c} .

Fijado un punto origen; por ejemplo, $O = (0, \dots, 0)$, cada vector \mathbf{c} determina un eje de coordenadas. Vamos a considerar ejes de coordenadas con origen en $O = (0, \dots, 0)$ y determinados por vectores unitarios; es decir, con $|\mathbf{c}| = 1$.

Coordenada de un punto en un eje de coordenadas: Sea A un punto de \mathbb{R}^n y $\mathbf{a} = A - O$ su vector asociado. Sea \mathbf{c} un vector de \mathbb{R}^n cuyo vector normalizado es \mathbf{c}° . La *coordenada* del punto A en el eje de coordenadas determinado por \mathbf{c} es el producto escalar

$$F(A, \mathbf{c}) = \mathbf{a}'\mathbf{c}^\circ.$$

Ejemplo 1.5 El eje X tiene punto origen $O = (0, \dots, 0)$ y vector director $\mathbf{e}_1 = (1, 0)'$, y el eje Y tiene el mismo punto origen, pero el vector director es $\mathbf{e}_2 = (0, 1)'$. Sean los puntos $A = (2, 3)$ y $B = (-2, 1)$. Calcular:

✓ Coordenada de A sobre el eje X : ...

✓ Coordenada de A sobre el eje Y : ...

Considera ahora el eje de coordenadas con origen $O = (0, \dots, 0)$ y vector director $\mathbf{u} = (1, 1)'$. Calcular:

✓ Coordenada de A sobre este eje: ...

✓ Coordenada de B sobre este eje: ...

1.2. Álgebra matricial

Matriz: Sean $n, p \in \mathbb{N}$. Una *matriz de orden $n \times p$ sobre \mathbb{R}* es un conjunto rectangular de np elementos de \mathbb{R} , representados en n filas y p columnas

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las matrices reales de orden $n \times p$ se designa por $\mathbb{R}^{(n,p)}$.

Se denotará por A_p una matriz A cuadrada con número de filas y columnas igual a p , es decir, con $n = p$.

Vectores fila: Las filas de A se pueden considerar como matrices de orden $1 \times p$ o como vectores de tamaño p :

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Vectores columna: Las columnas de A se pueden considerar como matrices de orden $n \times 1$ o como vectores de tamaño n :

$$\mathbf{a}^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Así, la matriz A puede escribirse como

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{a}^1 \ \mathbf{a}^2 \ \dots \ \mathbf{a}^p).$$

Operaciones con matrices:

Operación	Restricciones	Definición
Suma	A, B del mismo orden	$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
Producto escalar	$c \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{(n,p)}$	$cA = (ca_{ij})$
Multiplicación	$A \in \mathbb{R}^{(n,p)}, B \in \mathbb{R}^{(p,m)}$	$AB = (\mathbf{a}'_i \mathbf{b}^j)$
Traspuesta		$A' = (a_{ji})$
Traza	$n = p$	$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
Determinante	$n = p$	$ A $
Inversa	$n = p, A \neq 0$	$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}$

Ejemplo 1.6

- ✓ ¿Se cumple la propiedad conmutativa para el producto de matrices? ...
- ✓ ¿Y la propiedad asociativa? ...
- ✓ ¿Y la propiedad distributiva? ...

Propiedades de la traspuesta:

$$\begin{aligned}(A')' &= \dots, \\ (A + B)' &= \dots, \\ (AB)' &= \dots, \\ A \text{ simétrica} &\Leftrightarrow A' = \dots.\end{aligned}$$

Propiedades de la traza:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, y sean las matrices A_n , B_n , $C_{n \times p}$ y $D_{p \times n}$. La función traza cumple

$$\begin{aligned}\text{tr}(\alpha) &= \dots, \\ \text{tr}(\alpha A) &= \dots, \\ \text{tr}(A + B) &= \dots, \\ \text{tr}(CD) &= \dots.\end{aligned}$$

Determinantes: Fórmula de cálculo

(a) Matriz 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

(b) Matriz $p \times p$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

El *menor* de a_{ij} es el determinante de la matriz resultante al eliminar la fila i -ésima y la columna j -ésima. El *adjunto* de a_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces el menor de a_{ij} , y se denota por A_{ij} .

Tomamos una fila cualquiera, $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip})$. El determinante de A es

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ip}A_{ip}.$$

Igualmente, tomamos una columna cualquiera, $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, \dots, a_{pj})'$. El determinante de A es

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{pj}A_{pj}.$$

Ejemplo 1.7 Para la matriz A siguiente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

escribir los adjuntos de los elementos a_{11} y a_{12} :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Propiedades:

- (i) $|A| = |A'|$.
- (ii) Si A es triangular o diagonal, $|A| = \prod_{i=1}^p a_{ii}$.
- (iii) $|cA| = c^p|A|$, para $c \in K$.
- (iv) $|AB| = |A||B|$.

Ejemplo 1.8 Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & 1 & -1 \\ -1/4 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.9 Comprobar (iv) para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \dots, |B| = \dots, |AB| = \dots.$$

Matrices singulares o no singulares: Una matriz cuadrada es *singular* cuando $|A| = 0$; y es *no singular* si $|A| \neq 0$.

En una matriz singular, tanto las filas como las columnas son linealmente dependientes.

Ejemplo 1.10 Razonar si las siguientes matrices son singulares

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \neq 0.$$

...

Matriz inversa: La *matriz inversa* de una matrix cuadrada A es la única matriz que verifica

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}.$$

A^{-1} existe si, y sólo si A es no singular.

Propiedades:

- (i) $A^{-1} = (A_{ij})' / |A|$,
- (ii) $(cA)^{-1} = \dots$,
- (iii) $(AB)^{-1} = \dots$,
- (iv) $(A^{-1})' = \dots$,
- (v) $(A^{-1})^{-1} = \dots$.

Ejemplo 1.11 Calcular la inversa de las matrices del Ejemplo 1.10.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

B no tiene inversa, ya que es singular.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Matrices ortogonales: Una matriz cuadrada A es *ortogonal* si cumple $AA' = \mathbf{I}$. Las propiedades más importantes son las siguientes:

- (i) $A^{-1} = A'$
- (ii) $A'A = \mathbf{I}$
- (iii) Tanto las filas como las columnas de A son vectores ortogonales dos a dos.
- (iv) Si A y B son ortogonales, entonces $C = AB$ es ortogonal.

Ejemplo 1.12 ¿Es A ortogonal?...

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Multiplicácala por el vector $(1, 1)'$ y dibuja el resultado. ¿Qué transformación produce esta matriz?

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}.$$

Rango de una matriz: El *rango* de una matriz $A_{n \times p}$ es el número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes.

Ejemplo 1.13 Calcular el rango de las matrices del Ejemplo 1.10.

$$\begin{aligned}\text{rang}(A) &= \dots, \\ \text{rang}(B) &= \dots, \\ \text{rang}(C) &= \dots.\end{aligned}$$

Valores propios: Se denominan *valores propios* de una matriz cuadrada A_p a las soluciones de la ecuación (con incógnita λ):

$$|A - \lambda\mathbf{I}| = 0.$$

El término $|A - \lambda\mathbf{I}|$ es un polinomio de grado p . Todo polinomio de grado p tiene p raíces, contando sus multiplicidades. Pero estas raíces pueden ser reales o complejas. Por tanto, hay p valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, donde algunos pueden ser iguales entre sí, y también pueden ser complejos.

✓ El rango de una matrix es igual al número de valores propios no nulos.

Vectores propios: Sea λ_i un valor propio de A . Un *vector propio* de A asociado a λ_i es un vector $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{ip})$ que satisface

$$(A - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{o},$$

o equivalentemente,

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i.$$

Ejemplo 1.14 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{20} \\ \sqrt{20} & 4 \end{pmatrix}.$$

- Calcular su determinante y su traza.
- Calcular sus valores y vectores propios.
- Multiplica los valores propios. ¿Con qué coincide el resultado?

- (d) Suma los valores propios. ¿con qué coincide el resultado?
- (e) Haz el producto escalar de dos de los vectores propios asociados a los dos valores propios. ¿Qué ocurre?

Solución:...

Ejemplo 1.15 Sea \mathbf{u} un vector propio de A asociado al valor propio λ .

(a) Sea c un escalar. ¿Es el vector $c\mathbf{u}$ vector propio de A ? ¿Asociado a qué valor propio?

...

(b) Sea \mathbf{v} otro vector propio de A asociado al mismo valor propio λ . ¿Es $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ otro vector propio de A ? ¿Asociado a qué valor propio?

...

(c) ¿Es \mathbf{u} un vector propio de A^2 ? ¿Asociado a qué valor propio?

...

(d) Sea c un escalar. ¿Es \mathbf{u} un vector propio de la matriz cA ? ¿Asociado a qué valor propio?

...

Proposición 1.1 Si A es simétrica, entonces:

- ✓ todos sus valores propios son reales;
- ✓ los vectores propios asociados a distintos valores propios son ortogonales. Es decir, si \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_j son dos vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_i \neq \lambda_j$, entonces $\mathbf{v}_i' \mathbf{v}_j = 0$.

Descomposición espectral:

Sea A una matriz simétrica, con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ y vectores propios asociados (normalizados) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$, es decir,

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

Escribimos estas igualdades en forma matricial. Para ello, definimos

$$P = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \text{ y } \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}.$$

La matriz P es ortogonal, y se verifica

$$AP = P\Lambda \Leftrightarrow A = P\Lambda P'.$$

Teorema 1.2 (*Teorema de descomposición espectral*)

Cualquier matriz simétrica A puede expresarse como

$$A = P\Lambda P' = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1' + \cdots + \lambda_p \mathbf{v}_p \mathbf{v}_p',$$

donde

- ✓ $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ son los valores propios de A ;
- ✓ $P = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$, donde $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ son los vectores propios normalizados asociados a los valores propios de A , y P es ortogonal.

Además,

$$\text{rang}(A) = \text{número de valores propios no nulos.}$$

Ejemplo 1.16 Hacer la descomposición espectral de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{20} \\ \sqrt{20} & 4 \end{pmatrix}.$$