PROBLEMAS TEMA 1: ÁLGEBRA LINEAL Y MATRICIAL

Problema 1 Dados los tres vectores

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(a) Representarlos en el plano $I\!R^2$.

(b) Justificar si los tres vectores son linealmente independientes. Si no lo son, expresar uno cualquiera como combinación lineal de los otros dos.

(c) Calcular los vectores suma y diferencia de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, es decir, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, y representarlos.

(d) Calcular la norma de los tres vectores. Obtener vectores unitarios a partir de ellos.

(e) Calcular los productos escalares $\mathbf{a}'\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'\mathbf{c}$ y $\mathbf{a}'\mathbf{c}$.

(f) Calcular la proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.

(g) Considera el eje con origen $O = (0,0)$ y vector director $\mathbf{a}$. Calcula las coordenadas de los puntos $B = (2,1)$ y $C = (-2,1)$ en dicho eje. Ahora considera el eje con el mismo origen, pero con vector director $\mathbf{c}$, y calcula las coordenadas de $A = (1,2)$ y de $B = (2,1)$ en dicho eje. Representa los resultados.

Problema 2 Deducir si los siguientes vectores son linealmente independientes o dependientes:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Problema 3 Sean $\mathbf{u} = (1,2)'$, $\mathbf{v} = (-2,3)'$ y $\boldsymbol{w} = (3,-5)'$ tres vectores de $I\!R^2$. Evaluar las siguientes expresiones:

(a) $(\mathbf{u} - 2\mathbf{v})'\boldsymbol{w}$

(b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \boldsymbol{w}\|$

(d) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$

(e) $(\mathbf{u} - \mathbf{v})'(\mathbf{v} - \boldsymbol{w})$

Problema 4 Calcular la proyección de $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{a}$, siendo:

(a) $\mathbf{u} = (8,3)'$, $\mathbf{a} = (4,-5)'$.

(b) $\mathbf{u} = (2,1,-4)'$, $\mathbf{a} = (-5,3,11)'$.

Problema 5 Calcular los valores de k que hacen que los siguientes vectores sean ortogonales:

(a) $\mathbf{u} = (-2, k, -4)'$, $\mathbf{a} = (-1, 3, k)'$.

(b) $\mathbf{u} = (-2, k, -k)'$, $\mathbf{a} = (1, 3, k)'$.

Problema 6 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

(a) $A + B$ y $A - B$.

(b) $A'A$ y AA'.

(c) Calcular $(A + B)'$ y $A' + B'$.

(d) Comprobar que $(A')' = A$.

Problema 7 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular $A + B$ y $\mathrm{tr}(A + B)$.

(b) Comprobar que $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(c) Calcular AB y BA.

(d) Comprobar que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Problema 8 Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(b) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Problema 9 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular

(a) $\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{y}$.

(b) $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}'A$.

Problema 10 Considera una matriz cuadrada general B de tamaño $p \times p$ y otra matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

(a) ¿Cómo son las columnas de la matriz $B\Lambda$?

(b) ¿Cómo son las filas de la matriz ΛB?

Problema 11 Considera las matrices siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula su determinante y determina su rango.

(b) ¿son ortogonales?

Problema 12 Determinar cuáles de las siguientes matrices tienen inversa (son no singulares), y cuando la respuesta sea afirmativa, calcular dicha inversa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 9 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 13 Calcular el rango, la traza y realizar la descomposición espectral de las siguientes matrices

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & \varrho \\ \varrho & 1 \end{pmatrix}$

Problema 14 A partir de los valores propios de la matriz A del Problema 13 (a), obtener A^5 y A^{-3}.

Problema 15 Inventar una matriz simétrica 2×2 y hacer su descomposición espectral.

Problema 16 Inventar una matriz simétrica 3×3 con una fila (o columna) que sea combinación lineal de las otras. Hacer su descomposición espectral.