Capítulo 1

Álgebra lineal y matricial

1.1. Vectores y álgebra lineal

Un conjunto de n números reales $(a_1, \ldots, a_n)$ se puede representar:

- ✓ como un punto en el espacio n-dimensional;
- ✓ como un vector con punto inicial el origen de coordenadas $(0, \ldots, 0)$, y punto final $(a_1, \ldots, a_n)$.

Punto de $\mathbb{R}^n$:

$$A = (a_1, \ldots, a_n), \quad O = (0, \ldots, 0)$$

Vector de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los a_i se denominan *componentes* del vector.

Suma de vectores:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}$$

Producto de un vector por un escalar:

$$k \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \vdots \\ \quad \end{pmatrix}$$

Vector traspuesto:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}' = ...$$

Combinación lineal (CL) de vectores: Sean $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ vectores y $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$ escalares. El vector siguiente es una *combinación lineal* de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$:

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_m\mathbf{a}_m$$

Vectores linealmente dependientes e independientes: Sea $m \in \mathbb{N}$. Se dice que un conjunto de vectores $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ es *linealmente dependiente*, si existen escalares $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos, tales que

$$k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_m\mathbf{a}_m = \mathbf{o}\,, \tag{1.1}$$

Un conjunto de vectores se dice que es *linealmente independiente* si no es linealmente dependiente, es decir, si la única solución del sistema de ecuaciones (1.1) es

$$k_1 = \cdots = k_m = 0\,.$$

Ejemplo 1.1 Razonar si los siguientes grupos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Producto escalar de dos vectores: El producto escalar de $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)'$ por $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)'$ es el número real

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \, .$$

Ejemplo 1.2 Contesta a las siguientes cuestiones:

(a) Para un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, ¿puede ser $\mathbf{a}'\mathbf{a} = 0$?

...

(b) ¿Crees que el producto escalar verifica la propiedad conmutativa?

...

(c) Sea $k \in I\!R$. ¿Crees que se cumple $(k\mathbf{a})'\mathbf{b} = k\,\mathbf{a}'\mathbf{b}$?

...

(d) Sean $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)'$ y $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)'$. ¿Crees que se verifica $(\mathbf{a} + \mathbf{b})'\mathbf{c} = \mathbf{a}'\mathbf{c} + \mathbf{b}'\mathbf{c}$?

...

Módulo o norma de un vector: El módulo de un vector $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ es el número real

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,.$$

El módulo de un vector mide su longitud.

Teorema 1.1 Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I\!R^n$ y $k \in I\!R$. Entonces

(a) $|\mathbf{a}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0$,

(b) $|\mathbf{a}| > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \neq 0$,

(c) $|k\mathbf{a}| = |k||\mathbf{a}|$,

(d) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Vectores unitarios: Un vector $\mathbf{a} \in I\!R^n$ con módulo $|\mathbf{a}| = 1$ se llama vector *unitario*.

Normalización de una vector: Si un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ no es unitario, se puede construir el vector

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a}\,.$$

¿Es $\mathbf{a}^\circ$ unitario? ...

Ángulo entre dos vectores: Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I\!R^n - \{\mathbf{o}\}$. El *ángulo entre a y b* es el número real contenido entre 0 y π definido por

$$\mathrm{ang}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\mathbf{a}'\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Si $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ ó $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, entonces el ángulo no está definido .

Ejemplo 1.3 Sean los vectores de $I\!R^2$,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el ángulo entre ellos:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}'\mathbf{a} = \ldots \qquad , & \mathbf{b}'\mathbf{b} = \ldots \qquad , \\ |\mathbf{a}| = \ldots \qquad , & |\mathbf{b}| = \ldots \qquad , \end{array}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \ldots \qquad\qquad ,$$
$$\mathrm{ang}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ldots \qquad\qquad .$$

Vectores ortogonales: Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son *ortogonales* si

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = 0 \,.$$

Según esta definición, ¿a qué vectores es ortogonal el vector nulo?...

Vector proyección: Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$ dos vectores, donde $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$. El vector *proyección de* $\mathbf{a}$ *sobre* $\mathbf{c}$ es

$$\mathbf{c}_a = (\mathbf{a}'\mathbf{c}^\circ)\mathbf{c}^\circ \,.$$

El módulo del vector proyección es

$$|\mathbf{c}_a| = |\mathbf{a}'\mathbf{c}^\circ||\mathbf{c}^\circ| = |\mathbf{a}'\mathbf{c}^\circ| \,.$$

Ejemplo 1.4 Calculamos la proyección de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{c}$, siendo

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Calcular asimismo la proyección de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sobre $\mathbf{c}$. ¿Es igual a la suma de las proyecciones anteriores?

Vector que une dos puntos: Sean A, B dos puntos de $\mathbb{R}^n$. El vector con punto inicial A y punto final B es

$$\mathbf{v} = B - A.$$

Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\mathbb{R}^n$ y los vectores con punto inicial $O = (0, \ldots, 0)$: A cualquier punto A le corresponde un vector situado en el origen, $\mathbf{a} = A - O$, y viceversa.

Eje de coordenadas: Sea A un punto y $\mathbf{c}$ un vector. El *eje de coordenadas* con *punto origen* A y *vector director* $\mathbf{c}$ es la recta que pasa por A, con vector director $\mathbf{c}$.

Fijado un punto origen; por ejemplo, $O = (0, \ldots, 0)$, cada vector $\mathbf{c}$ determina un eje de coordenadas. Vamos a considerar ejes de coordenadas con origen en $O = (0, \ldots, 0)$ y determinados por vectores unitarios; es decir, con $|\mathbf{c}| = 1$.

Coordenada de un punto en un eje de coordenadas: Sea A un punto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a} = A - O$ su vector asociado. Sea $\mathbf{c}$ un vector de $\mathbb{R}^n$ cuyo vector normalizado es $\mathbf{c}^\circ$. La *coordenada* del punto A en el eje de coordenadas determinado por $\mathbf{c}$ es el producto escalar

$$F(A, \mathbf{c}) = \mathbf{a}'\mathbf{c}^\circ\,.$$

Ejemplo 1.5 El eje X tiene punto origen $O = (0, \ldots, 0)$ y vector director $\mathbf{e}_1 = (1, 0)'$, y el eje Y tiene el mismo punto origen, pero el vector director es $\mathbf{e}_2 = (0, 1)'$. Sean los puntos $A = (2, 3)$ y $B = (-2, 1)$. Calcular:

- ✓ Coordenada de A sobre el eje X: ...
- ✓ Coordenada de A sobre el eje Y: ...

Considera ahora el eje de coordenadas con origen $O = (0, \ldots, 0)$ y vector director $\mathbf{u} = (1, 1)'$. Calcular:

- ✓ Coordenada de A sobre este eje: ...
- ✓ Coordenada de B sobre este eje: ...

1.2. Álgebra matricial

Matriz: Sean $n, p \in \mathbb{N}$. Una *matriz de orden* $n \times p$ *sobre* $\mathbb{R}$ es un conjunto rectangular de np elementos de $\mathbb{R}$, representados en n filas y p columnas

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las matrices reales de orden $n \times p$ se designa por $\mathbb{R}^{(n,p)}$.

Vectores fila: Las filas de A se pueden considerar como matrices de orden $1 \times p$ o como vectores de tamaño p:

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}), \ i = 1, \ldots, n\,.$$

Vectores columna: Las columnas de A se pueden considerar como matrices de orden $n \times 1$ o como vectores de tamaño n:

$$\mathbf{a}^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \; j = 1, \ldots, p\,.$$

Así, la matriz A puede escribirse como

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{a}^1 \; \mathbf{a}^2 \; \ldots \; \mathbf{a}^p)\,.$$

Operaciones con matrices:

Operación	Restricciones	Definición
Suma	A, B del mismo orden	$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
Producto escalar	$c \in \mathbb{R},\; A \in \mathbb{R}^{(n,p)}$	$cA = (ca_{ij})$
Multiplicación	$A \in \mathbb{R}^{(n,p)}, B \in \mathbb{R}^{(p,m)}$	$AB = (\mathbf{a}_i'\mathbf{b}^j)$
Traspuesta		$A' = (a_{ji})$
Traza	$n = p$	$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
Determinante	$n = p$	$\|A\|$
Inversa	$n = p$, $\|A\| \neq 0$	$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}$

Ejemplo 1.6

✓ ¿Se cumple la propiedad conmutativa para el producto de matrices? ...

✓ ¿Y la propiedad asociativa? ...

✓ ¿Y la propiedad distributiva? ...

Propiedades de la traspuesta:

$$
\begin{aligned}
&(A')' = ... \quad , \\
&(A+B)' = ... \qquad , \\
&(AB)' = ... \quad , \\
&A \text{ simétrica} \Leftrightarrow A' = ... \quad .
\end{aligned}
$$

Propiedades de la traza:

Sea $\alpha \in K$, y sean las matrices A_n, B_n, $C_{n\times p}$ y $D_{p\times n}$. La función traza cumple

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\alpha) = ... \qquad , \\
&\mathrm{tr}(\alpha A) = ... \qquad , \\
&\mathrm{tr}(A+B) = ... \qquad , \\
&\mathrm{tr}(CD) = ... \qquad .
\end{aligned}
$$

Determinantes: Fórmula de cálculo

(a) Matriz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

(b) Matriz $p \times p$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

El *menor* de a_{ij} es el determinante de la matriz resultante al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima. El *adjunto* de a_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces el menor de a_{ij}, y se denota por A_{ij}.

Tomamos una fila cualquiera, $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ip})$. El determinante de A es

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ip}A_{ip}.$$

Igualmente, tomamos una columna cualquiera, $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{pj})'$. El determinante de A es

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{pj}A_{pj}.$$

Ejemplo 1.7 Para la matriz A siguiente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

escribir los adjuntos de los elementos a_{11} y a_{12}:

$$A_{11} = \left| \qquad\qquad\qquad \right|, \quad A_{12} = -\left| \qquad\qquad\qquad \right|.$$

Propiedades:

(i) $|A| = |A'|$.

(ii) Si A es triangular o diagonal, $|A| = \prod_{i=1}^{p} a_{ii}$.

(iii) $|cA| = c^p|A|, \quad$ para $c \in K$.

(iv) $|AB| = |A||B|$.

Ejemplo 1.8 Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & 1 & -1 \\ -1/4 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.9 Comprobar (iv) para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = ... \qquad , |B| = ... \qquad , |AB| = ... \qquad .$$

Matrices singulares o no singulares: Una matriz cuadrada es *singular* cuando $|A| = 0$; y es *no singular* si $|A| \neq 0$.

En una matriz singular, tanto las filas como las columnas son linealmente dependientes.

Ejemplo 1.10 Razonar si las siguientes matrices son singulares

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \; a, b, c, d \neq 0\,.$$

...

Matriz inversa: La *matriz inversa* de una matrix cuadrada A es la única matriz que verifica

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}\,.$$

A^{-1} existe si, y sólo si A es no singular.

Propiedades:

(i) $A^{-1} = (A_{ij})'/|A|$,

(ii) $(cA)^{-1} = ...$,

(iii) $(AB)^{-1} = ...$,

(iv) $(A^{-1})' = ...$,

(v) $(A^{-1})^{-1} = ...$.

Ejemplo 1.11 Calcular la inversa de las matrices del Ejemplo 1.10.

$$A^{-1} = \left(\qquad \qquad \right)$$

B no tiene inversa, ya que es singular.

$$C^{-1} = \left(\qquad \qquad \right)$$

Matrices ortogonales: Una matriz cuadrada A es *ortogonal* si cumple $AA' = \mathbf{I}$. Las propiedades más importantes son las siguientes:

(i) $A^{-1} = A'$

(ii) $A'A = \mathbf{I}$

(iii) Tanto las filas como las columnas de A son vectores ortogonales dos a dos.

(iv) Si A y B son ortogonales, entonces $C = AB$ es ortogonal.

Ejemplo 1.12 ¿Es A ortogonal?...

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Multiplícala por el vector $(1,1)'$ y dibuja el resultado. ¿Qué transformación produce esta matriz?

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\quad \right).$$

Rango de una matriz: El *rango* de una matriz $A_{n\times p}$ es el número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes.

Ejemplo 1.13 Calcular el rango de las matrices del Ejemplo 1.10.

$$\begin{aligned}\text{rang}(A) &= \ldots \quad , \\ \text{rang}(B) &= \ldots \quad , \\ \text{rang}(C) &= \ldots \quad .\end{aligned}$$

Valores propios: Se denominan *valores propios* de una matriz cuadrada A_p a las soluciones de la ecuación (con incógnita λ):

$$|A - \lambda\mathbf{I}| = 0.$$

El término $|A - \lambda\mathbf{I}|$ es un polinomio de grado p. Todo polinomio de grado p tiene p raíces, contando sus multiplicidades. Pero estas raíces pueden ser reales o complejas. Por tanto, hay p valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, donde algunos pueden ser iguales, y también pueden ser complejos.

✓ El rango de una matrix es igual al número de valores propios no nulos.

Vectores propios: Sea λ_i un valor propio de A. Un *vector propio* de A asociado a λ_i es un vector $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{ip})$ que satisface

$$(A - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i = 0,$$

o equivalentemente,

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i.$$

Ejemplo 1.14 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{20} \\ \sqrt{20} & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular su determinante y su traza.

(b) Calcular sus valores y vectores propios.

(c) Multiplica los valores propios. ¿Con qué coincide el resultado?

(d) Suma los valores propios. ¿con qué coincide el resultado?

(e) Haz el producto escalar de dos de los vectores propios asociados a los dos valores propios. ¿Qué ocurre?

Solución:...

Ejemplo 1.15 Sea $\mathbf{u}$ un vector propio de A asociado al valor propio λ.

(a) Sea c un escalar. ¿Es el vector $c\mathbf{u}$ vector propio de A? ¿Asociado a qué valor propio?

...

(b) Sea $\mathbf{v}$ otro vector propio de A asociado al mismo valor propio λ. ¿Es $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ otro vector propio de A? ¿Asociado a qué valor propio?

...

(c) ¿Es $\mathbf{u}$ un vector propio de A^2? ¿Asociado a qué valor propio?

...

(d) Sea c un escalar. ¿Es $\mathbf{u}$ un vector propio de la matriz cA? ¿Asociado a qué valor propio?

...

Proposición 1.1 Si A es simétrica, entonces:

✓ todos sus valores propios son reales;

✓ los vectores propios asociados a distintos valores propios son ortogonales. Es decir, si $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$ son dos vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_i \neq \lambda_j$, entonces $\mathbf{v}_i'\mathbf{v}_j = 0$.

Descomposición espectral:

Sea A una matriz simétrica, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ y vectores propios asociados (normalizados) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$, es decir,

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i,\ i = 1, \ldots, p\,.$$

Escribimos estas igualdades en forma matricial. Para ello, definimos

$$P = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p) \text{ y } \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}\,.$$

La matriz P es ortogonal, y se verifica

$$AP = P\Lambda \Leftrightarrow A = P\Lambda P'\,.$$

Teorema 1.2 (*Teorema de descomposición espectral*)
Cualquier matriz simétrica A puede expresarse como

$$A = P\Lambda P' = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1' + \cdots + \lambda_p \mathbf{v}_p \mathbf{v}_p',$$

donde

- ✓ $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de A;
- ✓ $P = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$, donde $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ son los vectores propios normalizados asociados a los valores propios de A, y P es ortogonal.

Además,

$$\mathrm{rang}(A) = \text{número de valores propios no nulos.}$$

Ejemplo 1.16 Hacer la descomposición espectral de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{20} \\ \sqrt{20} & 4 \end{pmatrix}.$$