PROBLEMAS TEMA 1: ÁLGEBRA, MEDIDAS ESTADÍSTICAS BÁSICAS Y DISTANCIAS. LICENCIADO EN ECONOMÍA

Problema 1 Dados los tres vectores

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(a) Representarlos en el plano $I\!R^2$.

(b) Justificar si los tres vectores son linealmente independientes. Si no lo son, expresar uno cualquiera como combinación lineal de los otros dos.

(c) Calcular los vectores suma y diferencia de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, es decir, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, y representarlos.

(d) Calcular la norma de los tres vectores. Obtener vectores unitarios a partir de ellos.

(e) Calcular los productos escalares $\mathbf{a}'\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'\mathbf{c}$ y $\mathbf{a}'\mathbf{c}$.

(f) Calcular la proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.

(g) Considera el eje con origen $O = (0, 0)$ y vector director $\mathbf{a}$. Calcula las coordenadas de los puntos $B = (2, 1)$ y $C = (-2, 1)$ en dicho eje. Ahora considera el eje con el mismo origen, pero con vector director $\mathbf{c}$, y calcula las coordenadas de $A = (1, 2)$ y de $B = (2, 1)$ en dicho eje. Representa los resultados.

(h) Calcula el baricentro de los puntos $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$ y $C = (-2, 1)$ con los escalares $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 1/4$ y $\alpha_3 = 1/2$, y dibuja el resultado en un plano.

(i) Utilizando como función de distantia la distancia euclídea al cuadrado, comprueba la desigualdad triangular para los puntos de (h), es decir,

$$d_e^2(A, B) + d_e^2(C, B) \geq d_e^2(A, C).$$

(j) A partir de las distancias euclídeas calculadas en (i), obtén medidas de similitud entre A y B, entre C y B y entre A y C.

Problema 2 Deducir si los siguientes vectores son linealmente independientes o dependientes:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Problema 3 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

(a) $A + B$ y $A - B$.

(b) $A'A$ y AA'.

(c) Calcular $(A + B)'$ y $A' + B'$.

(d) Comprobar que $(A')' = A$.

Problema 4 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular $A + B$ y $\mathrm{tr}(A + B)$.

(b) Comprobar que $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(c) Calcular AB y BA.

(d) Comprobar que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Problema 5 Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(b) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Problema 6 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular

(a) $\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{y}$.

(b) $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}'A$.

Problema 7 Determinar cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y cuando la respuesta sea afirmativa, calcular dicha inversa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 9 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 8 Calcular el rango, la traza y realizar la descomposición espectral de las siguientes matrices

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & \varrho \\ \varrho & 1 \end{pmatrix}$

Problema 9 Para el estudio de las ventas de una librería se seleccionan cuatro recibos. En dichos recibos aparece la cantidad total de euros, y el número de libros vendidos. Llamamos X_1 a la cantidad total en euros, y X_2 al número de unidades. Los datos aparecen en la tabla siguiente

Recibo	X_1	X_2
1	42	4
2	52	5
3	48	4
4	58	3

(a) Calcular el vector de medias $\bar{\boldsymbol{x}}$, la matriz de varianzas-covarianzas S_X y la matrix de correlaciones R_X del vector $X = (X_1, X_2)'$.

(b) Representar los datos en un plano.

(c) Calcular el baricentro de los cuatro puntos de la tabla, tomando pesos iguales. Representa dicho baricentro en el gráfico hecho en (b).

(d) Calcular el baricentro con pesos $(1/2, 1/6, 1/6, 1/6)$, y representarlo en el gráfico de (b).

Problema 10 Sean U_1 y U_2 dos variables aleatorias independientes con media cero y varianza 1. Se definen las variables:

$$X_1 = U_1, \quad X_2 = U_1 + U_2, \quad \text{y} \quad X_3 = U_1 - U_2.$$

(a) Calcular las esperanzas y las varianzas de X_1, X_2 y X_3.

(b) Escribir las matrices de covarianzas y de correlaciones de (X_1, X_2, X_3).

Problema 11 Se han medido los valores de tres variables X_1, X_2 y X_3 a n individuos, y se ha obtenido el vector de medias y la matriz de covarianzas

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad S_X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se calculan unos índices a partir de las variables anteriores, de la forma

$$Z_1 = 0{,}2X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}5X_3$$
$$Z_2 = -0{,}7X_1 + 0{,}1X_2 + 0{,}2X_3$$

(a) Proporcionar las medias y las varianzas de Z_1 y Z_2, así como la covarianza entre Z_1 y Z_2 a partir de $\bar{\boldsymbol{x}}$ y de S_X^2.

(b) Calcular las covarianzas entre las variables originales X_1, X_2 y X_3 y los índices Z_1 y Z_2. A partir de ellas, obtener las correspondientes correlaciones.

Problema 12 Considera la tabla de contingencia del Ejemplo 1.6. La *tabla de perfiles columna* se calcula dividiendo cada elemento de la tabla entre el total de su columna. Las columnas de esta tabla se llaman *perfiles columna*. Calcula:

(i) El baricentro de los perfiles columna, tomando como pesos los totales de las columnas de la misma tabla.

(ii) Calcula la distancia $\mathcal{X}^2$ entre los perfiles columna, tomando como pesos los inversos de los totales de las filas.

Problema 13 *(Exámen Feb. 2004 LADE)* En la tabla adjunta aparecen ciertas características medidas a tres presidentes de Estados Unidos.

Presidente	Lugar nacimiento	Elegido en la primera vuelta	Partido	Experiencia anterior en el congreso	Vicepresidente
Reagan	Medio Oeste	Sí	Republicano	No	No
Ford	Medio Oeste	No	Republicano	Sí	Sí
Kennedy	Este	Sí	Demócrata	Sí	No

A partir de los datos de la tabla, obtener una matriz de similaridades entre los tres presidentes.