Capítulo 7

Predicción con modelos ARIMA

7.1. INTRODUCCIÓN

Información disponible: Observamos una realización $\mathbf{y}_n = (y_1, \ldots, y_n)'$ de tamaño n de un proceso ARIMA(p, d, q).

Objetivo: Predicción de valores futuros y_{n+h}, $h > 0$ instantes en adelante.
n origen de la predicción
h horizonte de la predicción.

Predicción: Suponemos que los parámetros son conocidos. Entonces

- los operadores no estacionarios (las diferencias y la constante) determinan la predicción a largo plazo.
- los operadores estacionarios (AR y MA) influyen en la predicción a corto plazo.

7.2. CÁLCULO DE PREDICCIONES

Predictor óptimo de y_{n+h}: Es la función $f(\mathbf{y}_n)$ de los datos observados que minimiza el error cuadrático medio de predicción (ECMP),

$$\text{mín } E\left([Y_{n+h} - f(\mathbf{y}_n)]^2 | \mathbf{y}_n\right)$$

donde la esperanza se toma respecto a Y_{n+h} condicionada a $\mathbf{y}_n$.

Solución: Llamamos $\mu_{n+h|n} = E(Y_{n+h}|\mathbf{y}_n)$. Restando y sumando esto dentro de la esperanza, obtenemos

$$
\begin{aligned}
E\left([Y_{n+h} - f(\mathbf{y}_n)]^2 | \mathbf{y}_n\right) &= \ldots \\
&\ldots \\
&\ldots \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

El primer término de esta expresión no depende de $f(\mathbf{y}_n)$. Por tanto, la función $f(\mathbf{y}_n)$ que minimiza el error cuadrático medio de predicción es la esperanza de Y_{n+h} condicionada a $\mathbf{y}_n$,

$$\hat{y}_n(h) = f(\mathbf{y}_n) = ...$$

y el ECMP de $\hat{y}_n(h)$ es entonces

$$ECMP[\hat{y}_n(h)] = ...$$

Ejemplo 43 *Considérese el proceso $AR(1)$ dado por $Y_t = c + \phi Y_{t-1} + a_t$. Calcúlese la predicción de y_{n+h} dado $\mathbf{y}_n$ y el error de predicción.*

Sustituimos $t = n+1$ en la ecuación del modelo:

$$...$$

Tomamos esperanza condicionada a $\mathbf{y}_n$:

$$\begin{aligned} ... \qquad & = ... \\ & = ... \end{aligned}$$

Error cuadrático medio de predicción:

$$...$$

Sustituimos $t = n+2$ en la ecuación del modelo:

$$...$$

Tomamos esperanza condicionada a $\mathbf{y}_n$:

$$\begin{aligned} ... \qquad & = ... \\ & = ... \\ & = ... \end{aligned}$$

Error cuadrático medio de predicción:

$$\begin{aligned} ... \qquad & = ... \\ & = ... \\ & = ... \\ & = ... \\ & = ... \end{aligned}$$

Sustituimos $t = n+h$ en la ecuación del modelo:

$$...$$

Predicción de y_{n+h} dado $\mathbf{y}_n$, $h \geq 1$:

$$\begin{aligned} ... &= ... \\ &= ... \\ &= ... \\ &= \vdots \\ &= ... \end{aligned}$$

Error cuadrático medio de predicción:

$$\begin{aligned} ... &= ... \\ &= ... \\ &= ... \\ &= \vdots \\ &= ... \\ &= ... \end{aligned}$$

Ejemplo 44 *ARMA$(1,1)$: $Y_t = c + \phi Y_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$*
Como $y_1, \ldots, y_n$ son conocidas, entonces $a_1, \ldots, a_n$ también son conocidas, ya que se pueden obtener a partir de $y_1, \ldots, y_n$ suponiendo $a_1 = 0$ con la fórmula

$$...$$

Modelo para $t = n + 1$:

$$...$$

Predicción de y_{n+1} dado $\mathbf{y}_n$:

$$\begin{aligned} ... &= ... \\ &= ... \\ &= ... \end{aligned}$$

ya que $E[a_{n+1}|\mathbf{y}_n] = 0$ porque a_{n+1} es independiente de $\mathbf{y}_n$ y a_n es conocido.

Modelo para $t = n + 2$:

$$...$$

Predicción de y_{n+2} dado $\mathbf{y}_n$:

$$\begin{aligned} ... &= ... \\ &= ... \\ &= ... \end{aligned}$$

Modelo para $t = n + h$:

...

Predicción de y_{n+h} dado $\mathbf{y}_n$ para $h > 1$:

$$
\begin{aligned}
... \quad &= ... \\
&= ... \\
&= ... \\
&= ...
\end{aligned}
$$

Caso general: ARIMA(p, d, q)
Si $q > 0$, necesitaremos evaluar $E(a_{n+j}|\mathbf{y}_n)$. Vamos a denotar $\hat{a}_n(j) = E(a_{n+j}|\mathbf{y}_n)$.
Obsérvese que en un ARMA(p, q), si disponemos de q valores iniciales para las innovaciones $a_1, \dots, a_q$ además de los datos $y_1, \dots, y_n$, entonces $a_{q+1}, \dots, a_n$ se pueden obtener a partir de la fórmula

$$a_t = y_t - c - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \cdots + \theta_q a_{t-q}, \quad t = q+1, q+2, \dots, n.$$

Por tanto, suponemos que tanto las observaciones como las innovaciones hasta el instante n son conocidas.
Para un ARIMA(p, d, q), multiplicamos los operadores diferencia y AR y obtenemos un operador de orden $p^* = p + d$:

$$\varphi_{p^*}(B) = \phi_p(B)\nabla^d = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \ldots - \varphi_{p^*} B^{p^*}$$

Entonces el modelo para $t = n + h$ es:

$$Y_{n+h} = c + \varphi_1 Y_{n+h-1} + \cdots + \varphi_{p^*} Y_{n+h-p^*} + a_{n+h} - \theta_1 a_{n+h-1} - \cdots - \theta_q a_{n+h-q}. \quad (7.1)$$

Dado un origen n, podemos calcular predicciones para $h = 1, 2, \ldots$ tomando esperanzas condicionadas a $\mathbf{y}_n$:

$$... \quad (7.2)$$

donde

$$\hat{a}_n(j) = E(a_{n+j}|\mathbf{y}_n) = \begin{cases} a_{n+j}, & j \leq 0 \\ 0, & j > 0 \end{cases}$$

Tomando $h = 1$ en (7.1) y (7.2) y restando, obtenemos el error de predicción

...

✓ La innovación es el error de predicción a un periodo (suponiendo los parámetros del modelo conocidos).

Ecuación de predicción final: Para $h > q$ los términos MA desaparecen, y entonces la predicción queda determinada exclusivamente por la parte AR:

...

...

Ejemplo 45 *ARMA(1,1) (continuación)*
Para $h > 1$ la predicción es:

$$\hat{y}_n(h) = c(1 + \phi + \cdots + \phi^{h-1}) + \phi^{h-1}(\phi y_n - \theta a_n).$$

Tomando límite cuando $h \to \infty$ y suponiendo $|\phi| < 1$, obtenemos

$$\hat{y}_n(h) \to ...$$

✓ *La información actual deja de ser útil para la predicción a largo plazo.*

Ejemplo 46 *Paseo aleatorio: $Y_t = c + Y_{t-1} + a_t$*
Modelo para $t = n + 1$:

...

Predicción de y_{n+1} dado $\mathbf{y}_n$

...

ECMP:

...

Modelo para $t = n + 2$:

...

Predicción de y_{n+2} dado $\mathbf{y}_n$

...

ECMP:

$$
\begin{aligned}
... \qquad &= Var(a_{n+2} + Y_{n+1}) \\
&= ... \\
&= ...
\end{aligned}
$$

Modelo para $t = n + h$:

...

Predicción de y_{n+h} *dado* $\mathbf{y}_n$

...

✓ *Las predicciones siguen una recta con pendiente c y origen* y_n.

ECMP:

$$\begin{aligned} \ldots &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Ejemplo 47 *ARIMA*$(0,1,1)_{12}$ *estacional:*

$$\nabla_{12} Y_t = (1 - \theta B^{12}) a_t \Leftrightarrow Y_t = Y_{t-12} + a_t - \theta a_{t-12}.$$

Modelo para $t = n + h$*:*

...

Predicción de y_{n+h} *dado* $\mathbf{y}_n$, $h = 1, \ldots, 12$*:*

...

Predicción de y_{n+h} *dado* $\mathbf{y}_n$, $h = 13, \ldots, 24$*:*

...

Predicción de y_{n+h} *dado* $\mathbf{y}_n$ *para* $h > 24$*:*

...

✓ *La predicción está formada por 12 coeficientes* $\hat{y}_n(1), \ldots, \hat{y}_n(12)$ *que se van repitiendo.*

Nivel predicho:

$$\overline{y}_n(12) = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} \hat{y}_n(j) = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} y_{n+j-12} - \theta \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} a_{n+j-12}.$$

Coeficientes estacionales predichos para el mes j*:*

$$S_n(j) = \hat{y}_n(j) - \overline{y}_n(12) \quad \textit{(suman cero)}$$

Predicción para el mes j *del año* k*:*

$$\hat{y}_n(12k + j) = \overline{y}_n(12) + S_n(j), \quad j = 1, \ldots, 12, \quad k = 1, 2, \ldots$$

7.3. INTERPRETACIÓN DE LAS PREDICCIONES

7.3.1. PROCESOS ESTACIONALES

Ecuación de predicción final:

$$\phi_p(B)\nabla^d \hat{y}_n(h) = c \Longleftrightarrow \varphi_{p^*}(B)\hat{y}_n(h) = c, \quad h > q. \tag{7.3}$$

Caso homogéneo ($c = 0$): Las raíces de $\varphi_{p^*}(B)$ son las de los operadores $\phi_p(B)$ y $\nabla^d = (1-B)^d$. Las raíces del operador $\phi_p(B)$ son $G_1^{-1}, \ldots, G_p^{-1}$, con $|G_j| < 1, j = 1, \ldots, p$, y el operador diferencia solo tiene la raíz 1 con multiplicidad d. Por tanto, la solución a la ecuación en diferencias (7.3) es

$$\hat{y}_n(h) = p_n(h) + t_n(h),$$

donde

$$\begin{aligned} p_n(h) &= \ldots \\ t_n(h) &= \ldots \end{aligned}$$

Obsérvese que al hacer predicciones a horizontes lejanos, es decir, cuando $h \to \infty$,

$$\begin{aligned} &p_n(h) \to \ldots \quad \text{(componente permanente)}; \\ &t_n(h) \to 0 \quad \text{(componente transitorio)}. \end{aligned}$$

Nota 15 *Se verifica:*

- ✓ *Las predicciones a horizontes lejanos están dominadas por la componente permanente.*
- ✓ *En la componente permanente, los coeficientes $\beta_0^{(n)}, \ldots, \beta_{d-1}^{(n)}$ dependen de los datos observados $y_1, \ldots, y_n$ y de $a_1, \ldots, a_n$; es decir, dependen del origen de predicción n.*
- ✓ *Para $d = 1$, $p_n(h) = \beta_0^{(n)}$ es una constante. Podemos calcular esta constante haciendo predicciones hasta un horizonte h en el que la componente transitoria desaparezca y las predicciones sean constantes; esa constante será $\beta_0^{(n)}$.*
- ✓ *Para $d = 2$, $p_n(h) = \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} h$. Podemos predecir hasta que la diferencia entre dos predicciones consecutivas sea constante, y entonces*

$$\beta_1 = \hat{y}_n(h) - \hat{y}_n(h-1).$$

Caso no homogéneo ($c \neq 0$): $\phi_p(B)\nabla^d\, \hat{y}_n(h) = c,\ h > q$.

Solución particular de la ecuación completa: $\beta_d h^d$

Sustituyendo en la ecuación determinamos la constante β_d:

$$...$$

Se verifica

$$\nabla^d h^d = h^d - (h-1)^d = d!,$$

y como $\phi_p(B)$ aplicado a una constante es igual a $\phi_p(1)$, sustituyendo y despejando β_d, obtenemos β_d:

$$...$$

ya que $\mu = c/\phi_p(1) = c/(1-\phi_1-\cdots-\phi_p)$ es la media de la serie estacionaria $\nabla^d Y_t$.

Solución final: Suma de una solución particular de la ecuación completa y de la solución de la ecuación homogénea

$$\hat{y}_n(h) = ...$$

Componente permanente:

$$p_n^*(h) = ...$$

✓ Para horizontes alejados, esta componente está dominada por la constante β_d, que sólo depende de la media de la serie estacionaria y del orden de integración d, y no depende del origen de predicción n.

Ejemplo 48 *Paseo aleatorio:* $\nabla Y_t = c + a_t$ *($d = 1$, no homogéneo)*
Predicción de y_{n+h} *dado* $\mathbf{y}_n$*:*

$$\hat{y}_n(h) = ch + y_n,$$

recta con ordenada en el origen $\beta_0^{(n)} = y_n$ *y pendiente constante* $\beta_1 = c$*, que es la media de la serie estacionaria* ∇Y_t*. Estimador de c:*

$$\hat{c} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n} \nabla y_j = \frac{y_n - y_1}{n-1}.$$

Ejemplo 49 *ARIMA*$(0,2,1)$*:* $\nabla^2 Y_t = (1-\theta B)a_t$ *($d = 2$, homogéneo)*
El paseo aleatorio es el caso límite para $\theta \to 1$.
Predicción de y_{n+1} *dado* $\mathbf{y}_n$*:*

$$\hat{y}_n(1) = 2y_n - y_{n-1} - \theta a_n = y_n + \nabla\hat{y}_n(1), \ \textit{donde}\ \nabla\hat{y}_n(1) = \nabla y_n - \theta a_n.$$

Predicción de y_{n+2} dado $\mathbf{y}_n$:

$$\hat{y}_n(2) = 2\hat{y}_n(1) - y_n = y_n + 2\nabla\hat{y}_n(1)$$

Predicción de y_{n+h} dado $\mathbf{y}_n$, $h > 1$:

$$\hat{y}_n(h) = 2\hat{y}_n(h-1) - \hat{y}_n(h-2) = y_n + h\nabla\hat{y}_n(1),$$

que es una recta con ordenada en el origen $\beta_0^{(n)} = y_n$ y pendiente $\beta_1 = \nabla\hat{y}_n(1)$. No obtenemos un polinomio de grado 2 poque no hay constante, con lo cual, no hay solución particular.
Sustituyendo $a_n = (1-\theta B)^{-1}\nabla^2 y_n$ en $\nabla\hat{y}_n(1) = \nabla y_n - \theta a_n$, obtenemos

$$\nabla\hat{y}_n(1) = (1-\theta)\sum_{j=0}^{n-2}\theta^j\nabla y_{n-j}.$$

La pendiente es una media ponderada de los crecimientos ∇y_j observados;
Para $\theta \cong 1$, $\nabla\hat{y}_n(1) \cong \hat{c}$. Sin embargo, para $\theta = 0$, $\nabla\hat{y}_n(1) = \nabla y_n$.

7.3.2. PROCESOS ESTACIONALES

Un proceso estacional de periodo ℓ sigue el modelo general:

$$\Phi_P(B^\ell)\phi_p(B)\nabla_\ell^D\nabla^d Y_t = c + \theta_q(B)\Theta_Q(B^\ell)a_t.$$

Consideramos el caso $D = 1$ por simplicidad. Obsérvese que los operadores diferecia ∇_ℓ y ∇ tienen raíces comunes. Para obtener la solución de la ecuación homogénea, necesitamos separar las soluciones. Cada diferencia estacional se puede descomponer de la forma:

$$\nabla_\ell = (1 - B^\ell) = (1 + B + \cdots + B^{\ell-1})(1-B) = S_\ell(B)(1-B).$$

Tenemos una diferencia regular y un operador estacional puro que simplemente suma los instantes de un período. Estos dos operadores no tienen raíces comunes.

Entonces el modelo para $D = 1$ es:

$$\Phi_P(B^\ell)\phi_p(B)S_\ell(B)\nabla^{d+1}Y_n = c + \theta_q(B)\Theta_Q(B^\ell)a_t$$

Ecuación de predicción final:

$$\Phi_P(B^\ell)\phi_p(B)S_\ell(B)\nabla^{d+1}\hat{y}_n(h) = c, \quad h > q + \ell Q.$$

Caso homogéneo ($c = 0$): La solución de la ecuación de predicción viene dada por

$$\hat{y}_n(h) = p_n(h) + t_n(h) + S_n(h)$$

donde:

- $p_n(h)$ componente de tendencia, cuyos coeficientes se van adaptando al origen de la predicción:

$$p_n(h) = \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} h + \cdots + \beta_d^{(n)} h^d;$$

- $t_n(h)$ componente transitoria, que incluye las raíces de $\Phi_P(B^\ell)$ y $\phi_p(B)$:

$$t_n(h) = \sum_{j=1}^{p+P\ell} A_j G_j^h;$$

- $S_n(h)$ componente estacional que verifica:

  $$S_\ell(B)S_n(h) = (1+B+B^2+\cdots+B^{\ell-1})S_n(h) = S_n(h)+\cdots+S_n(h-(\ell-1)) = 0.$$

  Para $h = \ell$ se tiene

  $$\sum_{j=1}^{\ell} S_n(j) = 0.$$

  Es una función periódica de periodo ℓ con coeficientes que suman cero.

Caso no homogéneo ($c \neq 0$): Una solución particular es $\beta_{d+1}h^{d+1}$. Reemplazándola en la ecuación de predicción, obtenemos

$$\begin{aligned} c &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Despejando β_{d+1} resulta

...

La solución general de la ecuación completa tiene tres componentes:

- $p_n^*(h) = p_n(h) + \beta_{d+1}h^{d+1}$ componente permanente, donde los coeficientes de $p_n(h)$ dependen del origen de la predicción;

- $t_n(h)$ componente transitorio de predicción a corto plazo, que viene determinado por los operadores regulares y estacionales;

- $S_n(h)$ componente estacional.

Ejemplo 50 *Modelo de pasajeros en avión:* $ARIMA(0,1,1)_{12} \times (0,1,1)$

$$\nabla_{12}\nabla Y_t = (1 - \Theta B^{12})(1 - \theta B)a_t.$$

Multiplicando los operadores y aplicándolos a Y_t, el modelo es

...

$\Leftrightarrow$ ...

$\Leftrightarrow$ ...

Ecuación recurrente de predicción:

...

...

Solución de la ecuación recurrente:

...

Para determinar los 13 parámetros $\beta_0^{(n)}$, $\beta_1^{(n)}$, $S_n(1), \ldots, S_n(11)$ resolvemos el sistema de ecuaciones para $h = 1, \ldots, 12, 13$:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_n(1) &= \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} + S_n(1) \\
\hat{y}_n(2) &= \beta_0^{(n)} + 2\beta_1^{(n)} + S_n(2) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\hat{y}_n(12) &= \beta_0^{(n)} + 12\beta_1^{(n)} + S_n(12) \\
\hat{y}_n(13) &= \beta_0^{(n)} + 13\beta_1^{(n)} + S_n(1),
\end{aligned}$$

donde los coeficientes estacionales verifican

$$\sum_{j=1}^{12} S_n(h) = 0.$$

Restando la primera ecuación de la última, resulta

...

Es decir, la pendiente se estima con el incremento entre los Eneros de dos años consecutivos. Sumando las 12 primeras ecuaciones, obtenemos

...

$\Rightarrow \beta_0^{(n)} = \ldots$

Finalmente, los coeficientes estacionales se estiman despejándolos de las ecuaciones

...

7.4. VARIANZA DE LAS PREDICCIONES

Consideramos primero un MA(q): $Y_t = \theta_q(B)a_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$
Para $t = n + h$ el modelo es

...

Sabemos que

$$E[a_{n+j}|\mathbf{y}_n] = \begin{cases} ... & , \quad j < 0; \\ \quad ... & \quad j > 0. \end{cases}$$

Ecuación de predición:

$$\hat{y}_n(h) = \begin{cases} ... & , \quad h \leq q; \\ \qquad ... \; , & \quad h > q. \end{cases}$$

El error de predicción para $h \leq q$ es

$$e_n(h) = Y_{n+h} - \hat{y}_n(h) = ...$$

Por tanto, el ECMP es

$$E[e_n^2(h)|\mathbf{y}_n] = Var(e_n(h)|\mathbf{y}_n) = \begin{cases} ... & , \quad h \leq q; \\ ... & , \quad h > q. \end{cases}$$

ARIMA(p, d, q) $\Rightarrow$ Utilizamos la representación MA(∞):

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots$$

Modelo para $t = n + h$:

...

Predicción:

...

Error de predicción y ECMP:

$$e_n(h) = ...$$
$$E[e_n^2(h)|\mathbf{y}_n] = ...$$

Conclusión:

- Modelos estacionarios:

$$\psi_h \stackrel{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow E[e_n^2(h)|\mathbf{y}_n] \stackrel{h\to\infty}{\longrightarrow} Var(Y_t).$$

- Modelos no estacionarios:

$$\sum_j \psi_j^2 \stackrel{h\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow E[e_n^2(h)|\mathbf{y}_n] \stackrel{h\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Ejemplo 51 *Consideremos el modelo $ARIMA(1,1,1)$ definido por*

$$(1-0{,}4B)\nabla Y_t = (1-0{,}8B)a_t,$$

con $\sigma^2 = 4$, $y_{99} = 45$, $y_{100} = 50$ y $a_{100} = -1$. Predecimos y_{100+h}, $h = 1,2,3,4$, y construimos intervalos de confianza.

Modelo: ... .
Predicciones:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{100}(1) &= ...\\
\hat{y}_{100}(2) &= ...\\
\hat{y}_{100}(3) &= ...\\
\hat{y}_{100}(4) &= ...
\end{aligned}$$

Intervalos de confianza: Para calcular la varianza de las predicciones utilizamos la representación $MA(\infty)$

$$Y_t = (1-B)^{-1}(1-0{,}4B)^{-1}(1-0{,}8B)a_t = \psi(B)a_t,$$

donde los coeficientes del operador $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots$ se obtienen de la igualdad

$$(1-B)(1-0{,}4B)\psi(B) = 1-0{,}8B$$

...

...

De esta igualdad, obtenemos:

$$\psi_1 = ... \quad ; \quad \psi_2 = ... \quad ; \quad \psi_3 = ... \quad ; \quad \psi_4 = ... \quad ; \quad \ldots$$

Varianzas de las predicciones:

$$\begin{aligned}
Var(e_{100}(1)) &= ...\\
Var(e_{100}(2)) &= ...\\
Var(e_{100}(3)) &= ...\\
Var(e_{100}(4)) &= ...
\end{aligned}$$

Intervalos de confianza al 95 %, asumiendo normalidad:

...

7.5. ACTUALIZACIÓN DE PREDICCIONES

Supongamos que hemos hecho predicciones a horizonte $h = 1, 2, 3, \ldots$, con información hasta n, pero en el periodo siguiente observamos el dato y_{n+1} y queremos actualizar las predicciones:

Y_1	$\cdots$	Y_n	Y_{n+1}	Y_{n+2}	$\cdots$	Y_{n+h}
y_1	$\cdots$	y_n	$\hat{y}_n(1)$	$\hat{y}_n(2)$	$\cdots$	$\hat{y}_n(h)$
y_1	$\cdots$	y_n	y_{n+1}	...	$\cdots$	...

La predicción con origen en n a horizonte h es

$$\hat{y}_n(h) = \psi_h a_n + \psi_{h+1} a_{n-1} + \psi_{h+2} a_{n-2} + \cdots .$$

La predicción con origen en $n+1$ a horizonte $h-1$ es

$$\hat{y}_{n+1}(h-1) = \psi_{h-1} a_{n+1} + \psi_h a_n + \psi_{h+2} a_{n-1} + \cdots .$$

A estas últimas predicciones les restamos las anteriores:

$$\hat{y}_{n+1}(h-1) - \hat{y}_n(h) = \ldots$$

Por tanto, si tenemos el dato y_{n+1} y su predicción $\hat{y}_n(1)$, con ellos calculamos el error de predicción que coincide con la innovación $a_{n+1} = y_{n+1} - \hat{y}_n(1)$, y entonces la ecuación de actualización es:

$$\hat{y}_{n+1}(h-1) = \hat{y}_n(h) + \ldots \qquad , \quad h = 2, 3, 4, \ldots$$

Ejemplo 52 *Continuación del Ejemplo 51: Observamos $y_{101} = 54$ y actualizamos las predicciones con la fórmula anterior*

$$\begin{aligned} a_{101} &= \ldots \\ \hat{y}_{101}(1) &= \ldots \\ \hat{y}_{101}(2) &= \ldots \\ \hat{y}_{101}(3) &= \ldots \end{aligned}$$

Intervalos de confianza:

...

7.6. FUENTES DE INCERTIDUMBRE EN LA PREDICCIÓN

En la práctica, a la hora de predecir valores futuros de una serie, en primer lugar se identifica un modelo y se ajusta dicho modelo. En este proceso hay diversas fuentes de incertidumbre:

1. Desconocimiento de las innovaciones futuras: Esta fuente de incertidumbre es inevitable; existe incluso cuando el modelo y los parámetros son conocidos.
2. Desconocimiento de la distribución de probabilidad de las innovaciones.
3. Desconocimiento de los verdaderos valores de los parámetros.
4. Desconocimiento del tipo de modelo que genera los datos.

Nota 16 *Si disponemos de una muestra grande,*

- *podemos verificar si las innovaciones tienen distribución normal;*
- *las estimaciones de los parámetros tendrán varianzas pequeñas;*
- *se puede contrastar si el modelo identificado es fiable;*
- *podemos utilizar el modelo y los parámetros estimados como si fueran conocidos.*

Con muestras pequeñas ($n < 50$), las fuentes de incertidumbre 2-4 pueden causar intervalos de confianza engañosos, pues serán más estrechos de lo que debieran ser en realidad.