Capítulo 6

Procesos ARIMA estacionales

6.1. INTRODUCCIÓN

Otra causa de no estacionaridad es la *estacionalidad*: En una serie mensual con estacionalidad anual, cada mes tiene una media distinta, con lo cual la media no es estable.

Característica básica de una serie estacional: El comportamiento de la serie se repite cada ℓ observaciones (el periodo). En una serie mensual suele ser $\ell = 12$, en una serie diaria puele ser $\ell_1 = 7$ si hay estacionalidad semanal, $\ell_2 = 30$ si hay estacionalidad mensual y/o $\ell_3 = 365$ si hay estacionalidad anual. En la misma serie pueden existir distintos tipos de estacionalidad.

Modelo con estacionalidad: Suponiendo que solo hay un ciclo de perido ℓ y que ésta es la única causa de no estacionariedad, el modelo es

$$Y_t = s_t + u_t, \tag{6.1}$$

donde s_t es una función periódica de periodo ℓ y (u_t) es un proceso estacionario con media $E(u_t) = \mu_u$.

Tipos de comportamiento estacional:

a) *Estacionalidad determinista*: La estacionalidad se rige por una función determinista que se repite cada ℓ instantes

$$s_t = s_{t-\ell}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

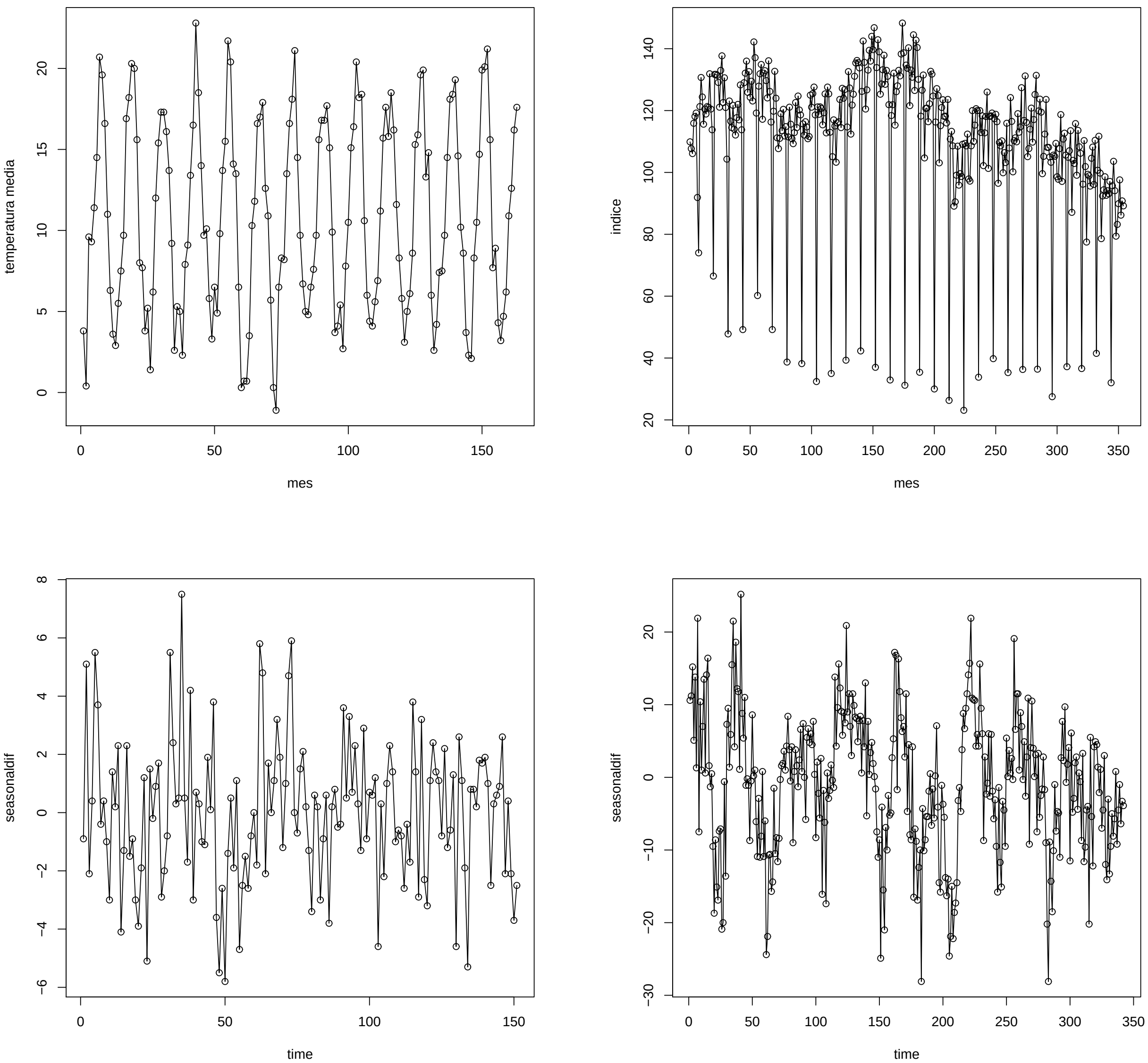
Entonces la media del proceso también es una función periódica

$$E(Y_t) = s_t + \mu_u = s_{t-\ell} + \mu_u = E(Y_{t-\ell}).$$

Llamamos $\nabla_\ell = (1 - B^\ell)$ al operador diferencia estacional de orden ℓ. Si le aplicamos este operador al proceso (6.1), obtenemos

...

Figura 6.1: Temperatura en Düsseldorf (izq.), índice de textil (der.) y sus diferencias estacionales (abajo)



que es un proceso estacionario MA(ℓ) no invertible.

b) *Estacionalidad estocástica estacionaria:* La estacionalidad s_t sigue un proceso estocástico estacionario

$$s_t = \mu + v_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

donde v_t es un proceso estacionario de media cero. Al tomar diferencia estacional de orden ℓ, obtenemos

...

que es una suma de procesos estacionarios media móvil de orden ℓ; por tanto, es un proceso media móvil de orden ℓ.

c) *Estacionalidad estocástica no estacionaria:* La estacionalidad varía a lo largo del tiempo de forma no estacionaria, p. ej. siguiendo un paseo aleatorio

$$s_t = s_{t-\ell} + v_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

donde (v_t) es un ruido blanco. Tomando diferencia estacional, obtenemos

...

que es un proceso media móvil de orden ℓ invertible.

Nota 14 *Hemos visto que*

✓ *en muchos casos, un proceso estacional se convierte en estacionario al tomar un número D de diferencias estacionales;*

✓ *así, para convertir un proceso no estacionario en estacionario, a menudo basta tomar*

$$w_t = \nabla_\ell^D \nabla^d Y_t.$$

6.2. MODELO ARIMA ESTACIONAL MULTIPLICATIVO

Consideremos una serie mensual con estacionalidad anual ($\ell = 12$), en la que observamos m periodos (m años). Reindexamos el tiempo de la forma

$$t = 12(k-1) + j, \quad j = 1, 2, \ldots, 12, \; k = 1, 2, \ldots, m$$

Así, los meses de Enero se obtienen para $j = 1$; Febrero para $j = 2$, etc. Para cada mes j tenemos una serie dada por

$$Z_k^{(j)} = Y_{12(k-1)+j}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

En principio, cada serie j puede seguir un proceso ARIMA diferente, pero a menudo esto se intenta simplificar porque, si no, habría demasiados parámetros para estimar. Como cada serie tiene media distinta, no podemos suponer que los 12 modelos son iguales. Sin embargo, es posible que las diferencias sí sigan el mismo modelo:

$$\Phi_P(B)\nabla Z_k^{(j)} = \Theta_Q(B)u_k^{(j)},$$

donde

$$\Phi_P(B) = 1 - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_P B^P.$$
$$\Theta_Q(B) = 1 - \Theta_1 B - \cdots - \Theta_Q B^Q.$$

Pero la diferencia de orden uno en los procesos mensuales es igual a la diferencia de orden $\ell = 12$ en el proceso original,

$$\nabla Z_k^{(j)} = Z_k^{(j)} - Z_{k-1}^{(j)} = Y_{12(k-1)+j} - Y_{12(k-1)+j-12} = \nabla_{12} Y_t$$

y también

$$\begin{aligned}
\Phi_P(B)Z_k &= (1 - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_P B^P)Z_k^{(j)} \\
&= Z_k^{(j)} - \Phi_1 Z_{k-1}^{(j)} - \cdots - \Phi_P Z_{k-P}^{(j)} \\
&= Y_{12(k-1)+j} - \Phi_1 Y_{12(k-1)+j-12} - \cdots - \Phi_P Y_{12(k-1)+j-12P} \\
&= Y_t - \Phi_1 Y_{t-12} - \cdots - \Phi_P Y_{t-12P} \\
&= \Phi_P(B^{12})Y_t.
\end{aligned}$$

Por tanto, el modelo es equivalente a

$$\Phi_P(B^{12})\nabla_{12} Y_t = \Theta_Q(B^{12})u_t, \tag{6.2}$$

donde

$$\Phi_P(B^{12}) = 1 - \Phi_1 B^{12} - \cdots - \Phi_P B^{12P}.$$
$$\Theta_Q(B^{12}) = 1 - \Theta_1 B^{12} - \cdots - \Theta_Q B^{12Q}.$$

Pero u_t no tiene por qué ser un ruido blanco porque suele haber dependencia, no solo entre los valores de la serie en el mismo mes, sino también entre meses consecutivos. Es decir, el proceso u_t que gobierna la parte regular (no estacional) del proceso, puede seguir un modelo ARIMA(p, d, q),

$$\phi_p(B)\nabla^d u_t = \theta_q(B)a_t. \tag{6.3}$$

Por tanto, finalmente el proceso completo es

$$\Phi_P(B^\ell)\phi_p(B)\nabla_\ell^D \nabla^d Y_t = \Theta_Q(B^\ell)\theta_q(B)a_t.$$

Este proceso se conoce como ARIMA$(P, D, Q)_\ell \times (p, d, q)$. Este tipo de procesos tiene las siguientes características:

✓ Contienen una componente ARIMA(P, D, Q) que modeliza la dependencia *estacional*, que está asociada a observaciones separadas por ℓ periodos, véase (6.2).

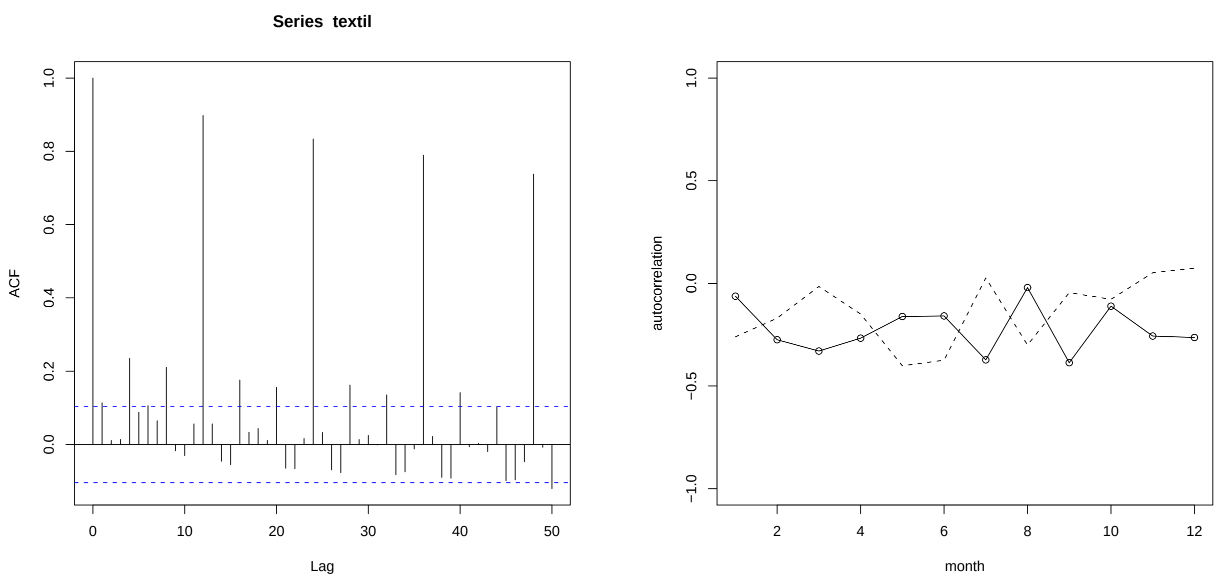
✓ Contienen otra componente ARIMA(p, d, q) que modeliza la dependencia *regular*, que es la dependencia asociada a observaciones consecutivas, véase (6.3).

✓ El proceso diferenciado $w_t = \nabla_\ell^D \nabla^d Y_t$ es un proceso estacionario que sigue el modelo ARMA estacional

$$\Phi_P(B^\ell)\phi_p(B)w_t = \Theta_Q(B^\ell)\theta_q(B)a_t.$$

Hipótesis básica: La dependencia estacional es la misma para todas las estaciones. Siempre que dispongamos de suficientes datos conviene contrastar esta hipótesis construyendo los modelos para cada mes y viendo si presentan la misma estructura.

Figura 6.2: Índice textil, *fas* (izq.) y primeras dos autocorrelaciones de las primeras diferencias estacionales (28 instantes por mes, der.)



Función de autocorrelación simple: Llamamos

- r_h a los coeficientes de autocorrelación del proceso ARMA(p,q) regular $X_t = \nabla^d Y_t$,
$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)a_t;$$
- $R_{k\ell}$ a los coeficientes de autocorrelación en los retardos estacionales $\ell, 2\ell, 3\ell, \ldots$ del proceso ARMA(P,Q) estacional $Z_t = \nabla_\ell^D Y_t$,
$$\Phi_P(B^{12})Z_t = \Theta_Q(B^{12})u_t;$$
- ρ_h a los coeficientes de autocorrelación del proceso completo $w_t = \nabla_\ell^D \nabla^d Y_t$,
$$\Phi_P(B^{12})\phi_p(B)w_t = \Theta_Q(B^{12})\theta_q(B)a_t.$$

Entonces, los coeficientes del proceso completo son una mezcla de la *fas* de la parte regular y de la *fas* de la parte estacional,

$$\rho_h = \frac{r_h + \sum_{k=1}^{\infty} R_{k\ell}(r_{k\ell+h} + r_{k\ell-h})}{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r_{k\ell}R_{k\ell}}.$$

Aproximación: suponemos $r_h \cong 0$ para retardos altos; pongamos para $h > \lfloor \ell/2 \rfloor$. Entonces,

$$\rho_h \cong \begin{cases} r_h, & h = 1, 2, \ldots, \lfloor \ell/2 \rfloor \\ R_h, & h = \ell, 2\ell, \ldots \\ R_{k\ell}\, r_{|j|}, & h = k\ell + j,\ j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\lfloor \ell/2 \rfloor \end{cases}$$

Función de autocorrelación parcial: (véase Hamilton y Watts, 1978)

- En los primeros retardos aparece la *fap* de la parte regular;
- En los retardos estacionales aparece la *fap* de la parte estacional, pero con menor magnitud;
- A la derecha de los retardos estacionales aparece la *fap* de la parte regular, pero posiblemente se cambia el signo, según el signo del coeficiente estacional;
- A la izquierda de los retardos estacionales aparece la *fas* de la parte regular.

Ejemplo 42 *Consideremos el proceso $MA(1)\times MA(1)_{12}$ dado por*

$$w_t = (1 + 0{,}8B)(1 - 0{,}5B^{12})a_t.$$

Componente regular: MA(1) con coeficiente $\theta = -0{,}8$,

$$r_h = \begin{cases} \ldots & , \quad h = 1 \\ \ldots \; , & \quad h \geq 2 \end{cases}$$

Componente estacional: $MA(1)_{12}$ con coeficiente $\Theta = 0{,}5$,

$$R_h = \begin{cases} \ldots & , \quad h = 12 \\ \ldots \; , & \quad h \neq 12 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho_h &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de r_h y R_h, obtenemos

$$\rho_h = \begin{cases} \ldots & , \quad h = 1 \\ \ldots \; , & \quad h = 2, \ldots, 10 \\ \ldots & , \quad h = 11 \\ \ldots & , \quad h = 12 \\ \ldots & , \quad h = 13 \\ \ldots \; , & \quad h > 13 \end{cases}$$

Figura 6.3: *Fas* (izq.) y *fap* (der.) de las diferencias estacionales de las temperaturas (arriba) y del índice de textil (abajo)

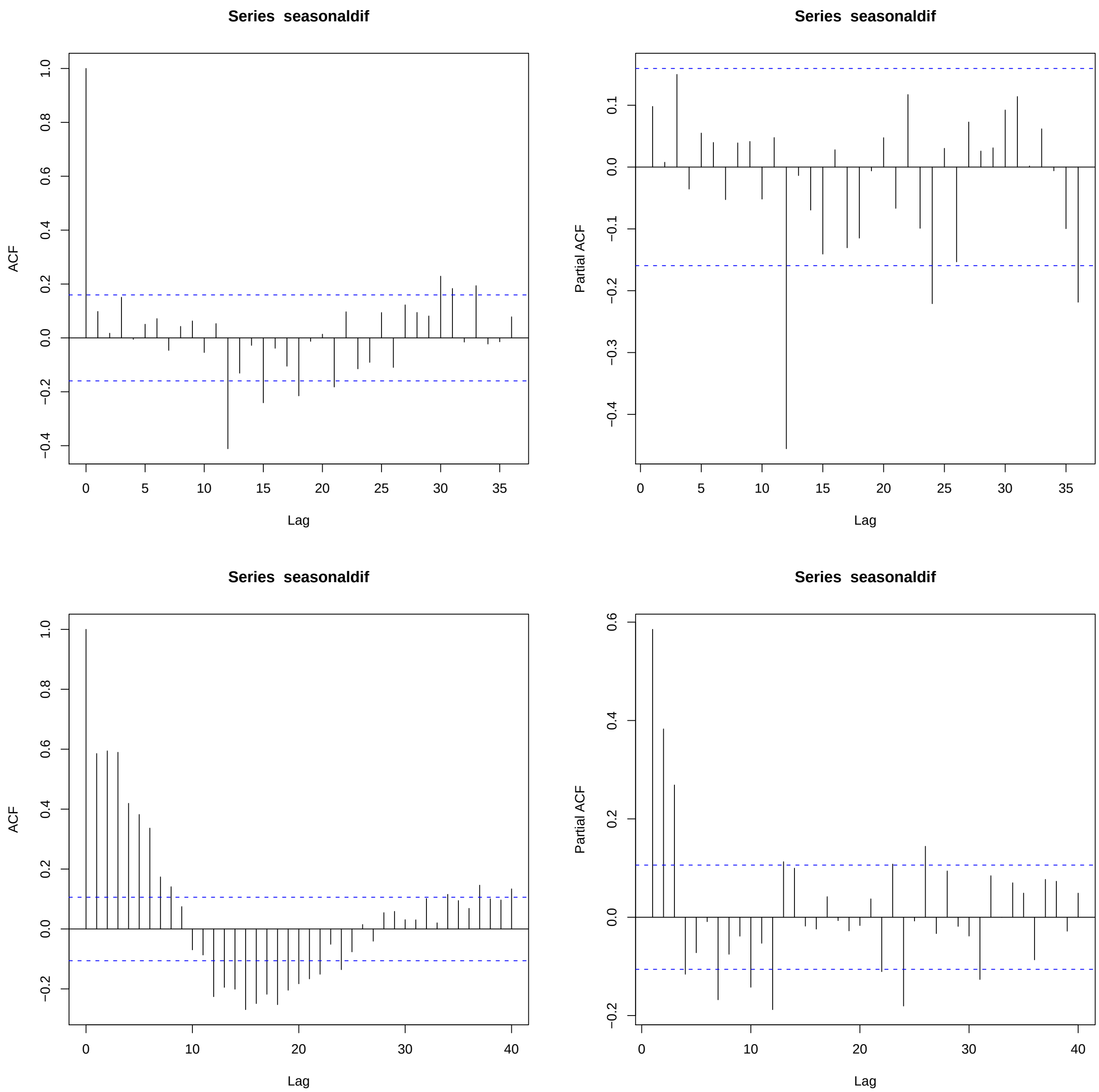


Figura 6.4: *Fas* (izq.) y *fap* (der.) de procesos ARMA estacionales

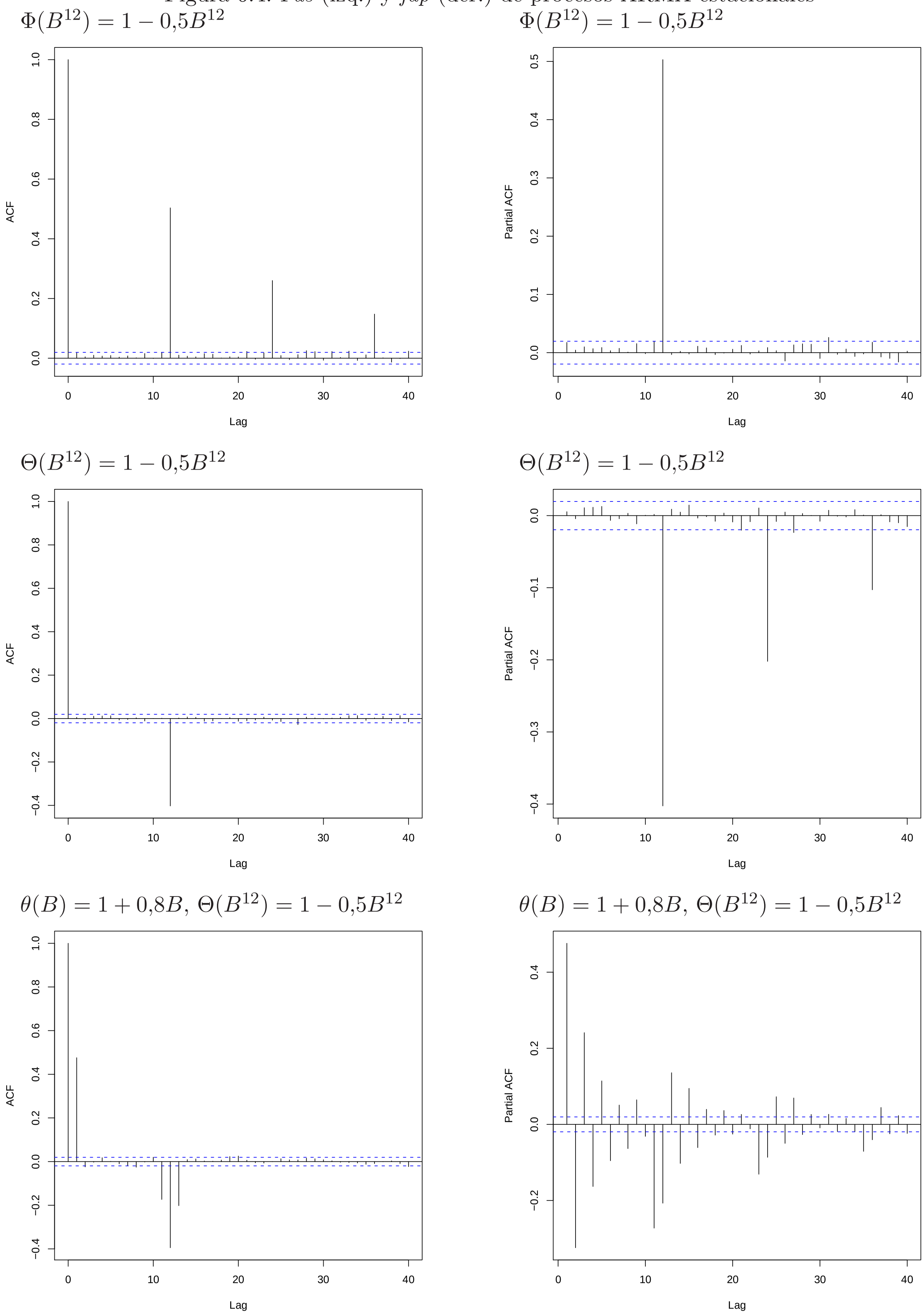


Figura 6.5: *Fas* (izq.) y *fap* (der.) de procesos ARMA estacionales