Capítulo 4

Procesos de Media Móvil y ARMA

- ✓ Los procesos AR no pueden representar series de memoria muy corta, donde el valor actual de la serie sólo está correlado con un número pequeño de valores anteriores de la serie.
- ✓ Los procesos MA son función de un número finito de innovaciónes anteriores, no de todas.
- ✓ La clase de modelos ARMA es amplia y flexible, ya que combina las estructuras AR y MA. Es útil para representar una gran variedad de series utilizando pocos parámetros.

4.1. Proceso media móvil de orden uno: MA(1)

Modelo: La ecuación de un MA(1) se basa en la idea: "La innovación de ayer permanece hoy solo parcialmente".

$$\tilde{Y}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \Longleftrightarrow \tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B)a_t.$$

donde $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$, y (a_t) es ruido blanco con varianza σ^2.

- ✓ El MA(1) es suma de dos procesos estacionarios $\Rightarrow$ Es estacionario para cualquier valor de θ_1.
- ✓ Supondremos que $|\theta_1| < 1$ para que la innovación pasada influya menos que la actual.

Invertibilidad: La condición $|\theta_1| < 1$ permite invertir el operador

$$(1 - \theta_1 B)^{-1} = 1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \cdots .$$

Multiplicando este operador a ambos lados de la ecuación del modelo, obtenemos

...

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= ... \\ &= ... \end{aligned} \tag{4.1}$$

Varianza: Elevando la ecuación del modelo al cuadrado y tomando esperanzas,

$$\gamma_0 = ...$$

Autocovarianzas: Multiplicando la ecuación del modelo por $\tilde{Y}_{t-1}$ y tomando esperanzas, como $\tilde{Y}_{t-1}$ está incorrelado con la innovación futura a_t,

$$\gamma_1 = ...$$

Haciendo lo mismo para $\tilde{Y}_{t-2}$,

$$\gamma_2 = ...$$

Finalmente, la función de autocovarianzas es

$$\gamma_h = ...$$

Función de autocorrelación:

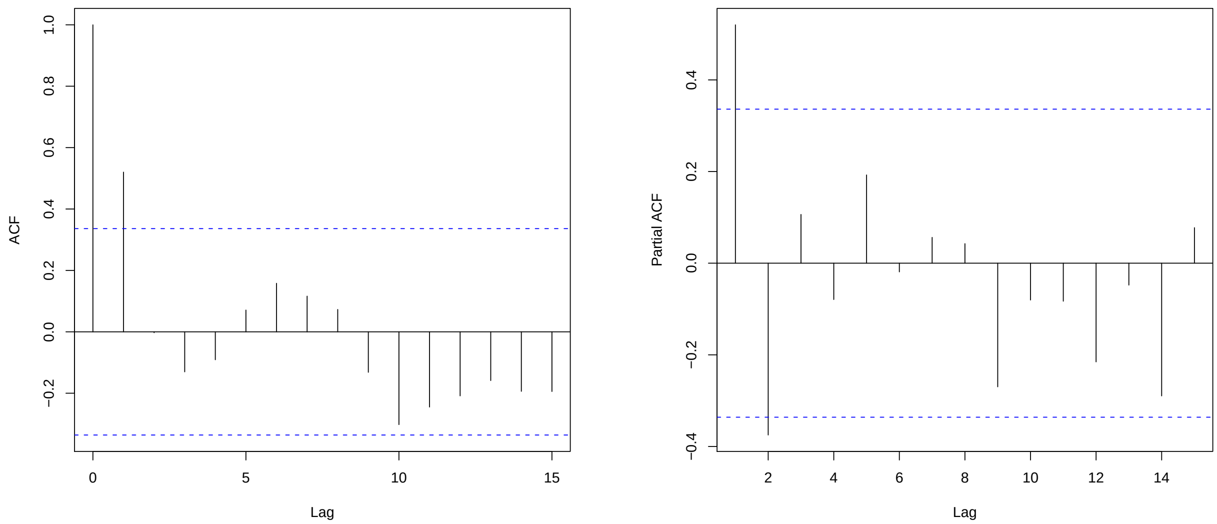
$$\rho_h = ...$$

ρ_1 es una función monótona decreciente en θ_1 y $|\rho_1| < 0{,}5$.

Dualidad entre AR y MA:

- ✓ La *fas* de un MA(1) tiene estructura similar a la *fap* de AR(1), con un sólo un coeficiente no nulo.
- ✓ Por (4.1), la *fap* de un MA(1) tiene la misma estructura que la *fas* de AR(1), con decrecimiento geométrico.

Figura 4.1: *Fas* y *fap* para el viaje de Colon



4.2. Proceso de media móvil MA(q)

Modelo: Un proceso MA(q) sigue el modelo

$$\tilde{Y}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q},$$

donde $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ y (a_t) es ruido blanco con varianza σ^2. En función del operador

$$\Theta_q(B) = ...$$

el modelo es

$$...$$

✓ Un MA(q) siempre es estacionario, ya que es suma de $q+1$ procesos estacionarios.

Invertibilidad: Un MA(q) es *invertible* si podemos escribirlo como un AR(∞) con coeficientes finitos. Definimos el operador inverso

$$\Pi(B) = \Theta_q^{-1}(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots$$

Los coeficientes $\pi_1, \pi_2, \ldots$, se obtienen a partir de la definición de operador inverso

$$\Pi(B)\Theta_q(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \cdots)(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) = 1.$$

Igualando los coeficientes de B, B^2, B^3 etc., obtenemos

$$
\begin{aligned}
&...\\
&...\\
&...
\end{aligned}
$$

✓ Solución general: $\pi_h = \sum_{i=1}^{q} A_i G_i^h$, donde G_i^{-1} son las raíces de $\Theta_q(B)$.

✓ Un MA(q) es invertible si las raíces de $\Theta_q(B)$ son, en módulo, mayores que 1.

Multiplicando a ambos lados de la ecuación del modelo por el operador $\Pi(B)$, obtenemos la representación AR(∞) de un MA(q):

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}_t &= ...\\
&= ...
\end{aligned}
$$

Varianza: Elevando al cuadrado la ecuación del modelo y tomando esperanzas, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= ...\\
&= ...\\
&= ...
\end{aligned}
$$

Autocovarianzas: Multiplicando la ecuación del modelo por $\tilde{Y}_{t-1}$ y tomando esperanza obtenemos

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= ... \\
&= ... \\
&= ... \\
& ... \\
& ... \\
& ... \\
&= ... \\
&= ...
\end{aligned}
$$

siendo $\theta_0 = -1$. Ahora multiplicamos el modelo por $\tilde{Y}_{t-2}$ y tomamos esperanza,

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= ... \\
&= ... \\
&= ... \\
& ... \\
& ... \\
& ... \\
& ... \\
&= ... \\
&= ...
\end{aligned}
$$

En general, para $h \leq q$, se tiene

$$\gamma_h = ...$$

Sin embargo, para $h > q$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\gamma_h &= ... \\
&= ... \\
&= ...
\end{aligned}
$$

En resumen:

$$\gamma_h = \begin{cases} \ldots & h = 0 \\ \ldots & h = 1, \ldots, q \\ \ldots & h > q \end{cases} \tag{4.2}$$

Función de autocorrelación simple:

$$\rho_h = \begin{cases} \ldots & h = 1, \ldots, q \\ \\ \ldots & h > q \end{cases}$$

Función de autocorrelación parcial: Utilizando la expresión AR(∞),

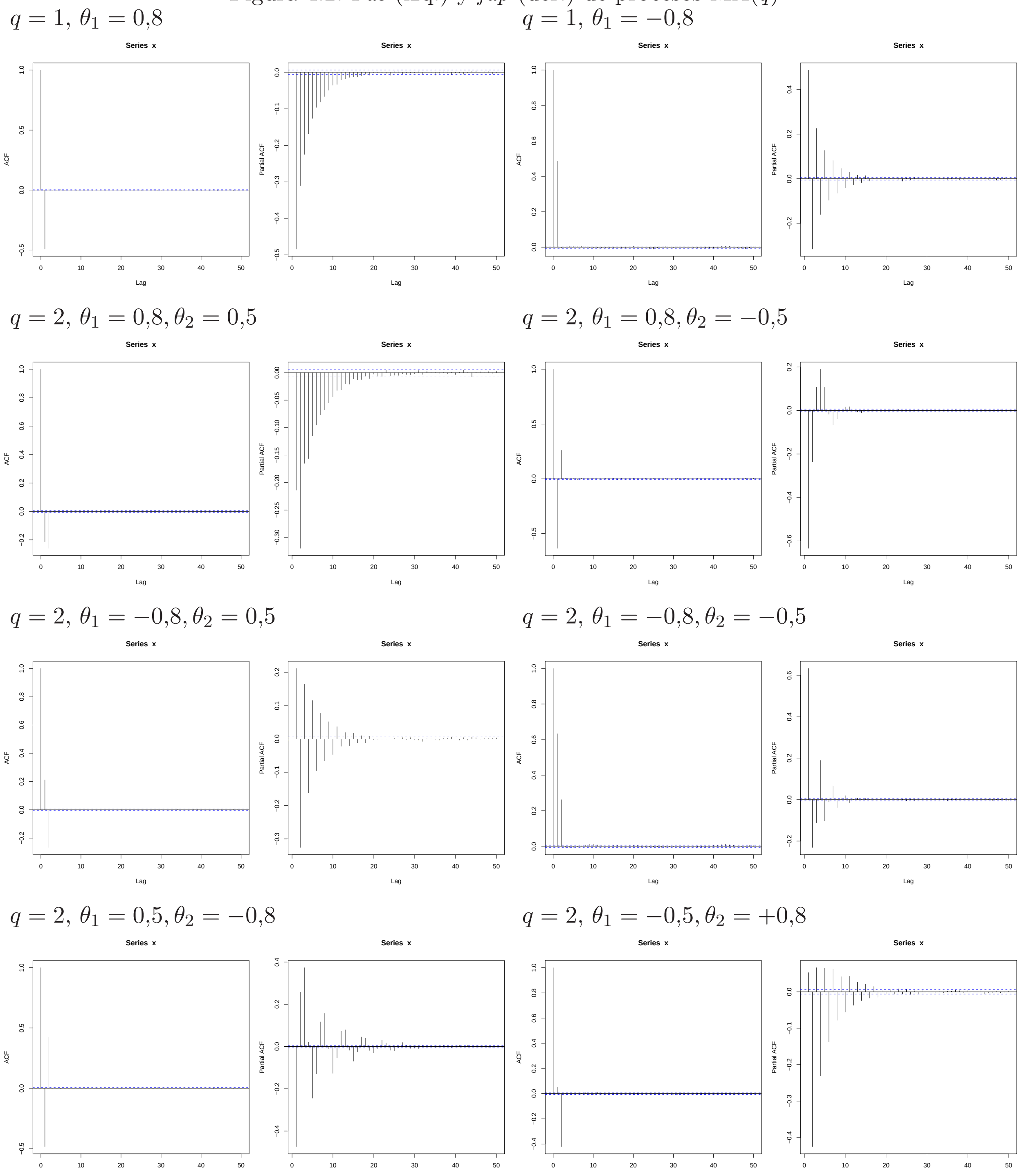
$$\tilde{Y}_t = \pi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \cdots + \pi_k \tilde{Y}_{t-k} + \cdots + a_t,$$

podemos ver que la *fap* de un MA será no nula para cualquier retardo, ya que en esta expresión $\tilde{Y}_{t-i}$ afecta a $\tilde{Y}_t$ para cualquier i.

Dualidad entre AR y MA:

- La *fas* de un MA(q) tiene una estructura similar a la de la *fap* de un AR(q): sólo los primeros q coeficientes son distintos de 0.
- La *fap* de un MA(q) tiene estructura similar a la *fas* de AR(q): mezcla de decrecimientos geométricos y sinuoidales hacia 0.

Figura 4.2: *Fas* (izq.) y *fap* (der.) de procesos MA(q)



4.3. Procesos MA(∞): Descomposición de Wold

Descomposición de Wold (Wold, 1938): Todo proceso estocástico débilmente estacionario (Y_t) con media finita μ, que no contenga componentes deterministas, puede escribirse como una función lineal de variables aleatorias incorreladas:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots \\ &= \mu + \sum_{h=0}^{\infty} \psi_h a_{t-h}, \end{aligned}$$

donde $\psi_0 = 1$ y (a_t) es ruido blanco con varianza σ^2.

Definiendo un operador podemos escribir el proceso como

$$\tilde{Y}_t = \Psi(B) a_t, \quad \Psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots$$

Varianza:

$$\gamma_0 = ...$$

Función de autocovarianza:

$$\gamma_h = ...$$

Función de autocorrelación simple:

$$\rho_h = ...$$

Invertibilidad: Todo proceso estacionario para el cual exista el operador inverso $\Pi(B) = \Psi^{-1}(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots$ admite una representación AR(∞) de la forma:

$$\tilde{Y}_t = \pi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \cdots + a_t,$$

donde los coeficientes se pueden obtener a partir de los de $\Psi(B)$ utilizando la igualdad $\Pi(B)\Psi(B) = 1$.

4.4. Proceso ARMA(1,1)

- ✓ Los procesos AR(p) permiten infinitas autocorrelaciones no nulas, pero éstas deben decrecer con el retardo geométricamente o de forma sinusoidal.
- ✓ Los procesos MA(q) tienen las q primeras autocorrelaciones no nulas sin restricciones sobre ellas, y el resto son cero.
- ✓ Los procesos ARMA(p, q) combinan ambas propiedades; pueden representar a procesos con las primeras p autocorrelaciones no nulas y no restringidas, y el resto que decrecen de forma geométrica o de forma sinusoidal.

Modelo: El ARMA$(1, 1)$ sigue el modelo

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1},$$

donde $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ y (a_t) es ruido blanco con varianza σ^2. En notación de operadores,

...

Condición de estacionariedad: $|\phi_1| < 1$

Condición de invertibilidad: $|\theta_1| < 1$

Supondremos además que $\phi_1 \neq \theta_1$, para que $(1 - \phi_1 B) \neq (1 - \theta_1 B)$ y no tener un ruido blanco.

Función de autocovarianzas: Multiplicando el modelo por $\tilde{Y}_{t-h}$,

...

y tomando esperanzas,

$$\gamma_h = ...$$

Si $h = 0$, entonces

$$\begin{aligned} E[a_t \tilde{Y}_t] &= ... \\ E[a_{t-1} \tilde{Y}_t] &= ... \end{aligned}$$

donde

$$E[a_{t-1} \tilde{Y}_{t-1}] = ...$$

Por tanto,

$$E[a_{t-1}\tilde{Y}_t] = ...$$

y finalmente,

$$\gamma_0 = ...$$

Para $h = 1$, se tiene

$$E[a_t\tilde{Y}_{t-1}]... \quad , \quad E[a_{t-1}\tilde{Y}_{t-1}] = ... \quad ,$$

con lo cual

$$\gamma_1 = ...$$

Reemplazamos γ_1 en la fórmula de γ_0 y obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= ... \\ &= ... \end{aligned}$$

Despejando γ_0, obtenemos

$$\gamma_0 = ...$$

Finalmente, para $h > 1$,

$$E[a_t\tilde{Y}_{t-h}] = E[a_{t-1}\tilde{Y}_{t-h}] = ...$$

con lo cual,

$$\gamma_h = ...$$

En resumen,

$$\gamma_h = \begin{cases} ... & h = 0 \\ ... & h = 1 \\ ... & h \geq 2 \end{cases}$$

Función de autocorrelación simple:

$$\rho_h = \begin{cases} ... & h = 1 \\ ... & h \geq 2 \end{cases}$$

- ✓ La *fas* tiene un primer coeficiente ρ_1 cuya magnitud depende de $\phi_1 - \theta_1$.
- ✓ Después del primer coeficiente, la *fas* de un ARMA$(1, 1)$ tiene un decrecimiento exponencial (igual que si fuera un AR(1)) que depende de la magnitud de ϕ_1.

Función de autocorrelación parcial: Para estudiar la *fap* de un ARMA$(1,1)$, lo escribimos como un AR(∞). Para ello, multiplicamos el modelo por el operador

$$(1-\theta_1 B)^{-1} = 1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \theta_1^3 B^3 + \cdots$$

y obtenemos

$$(1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \theta_1^3 B^3 + \cdots)(1-\phi_1 B)\tilde{Y}_t = a_t$$

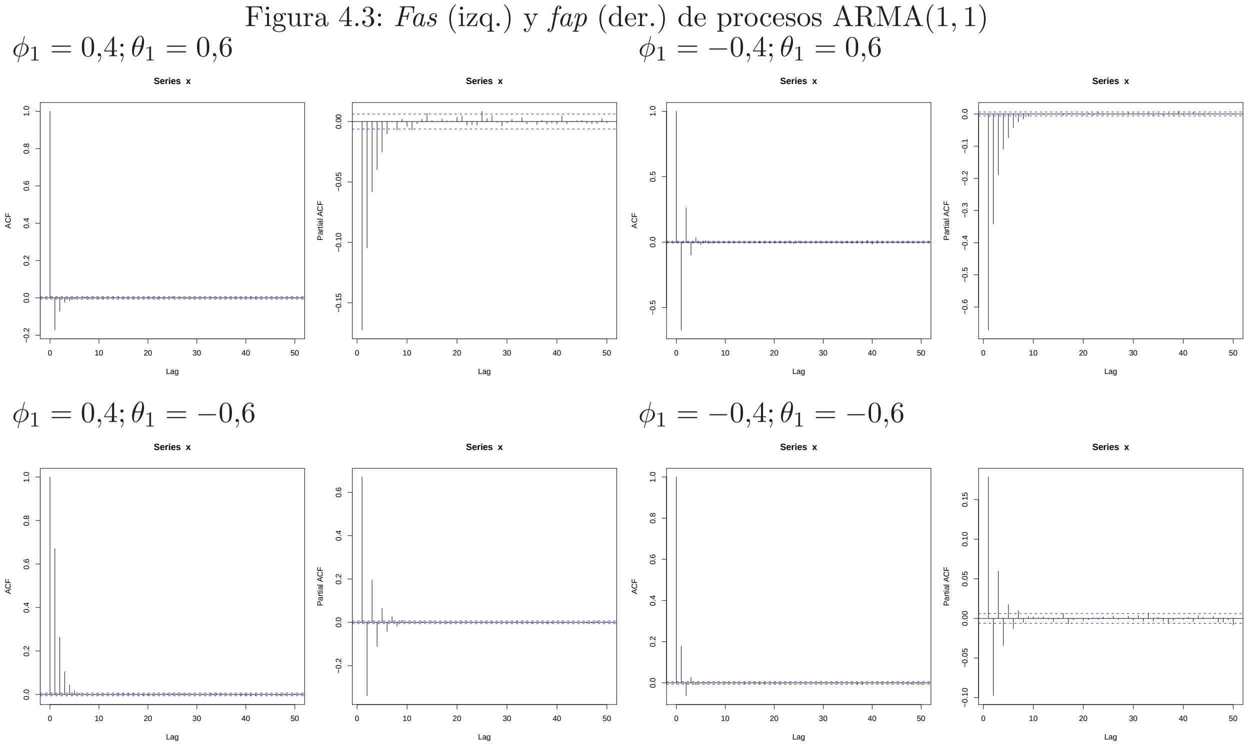
o equivalentemente

$\tilde{Y}_t = ...$

Como $|\theta_1| < 1$, el efecto de $\tilde{Y}_{t-i}$ decrece geométricamente con el retardo i.

✓ La *fas* y la *fap* de un ARMA$(1,1)$ tienen estructura similar: hay un primer coeficiente cuya magnitud depende de $\phi_1 - \theta_1$, y los siguientes después decrecen geométricamente. La tasa de decrecimiento de la *fas* depende de ϕ_1, la de la *fap* de θ_1.

Figura 4.3: *Fas* (izq.) y *fap* (der.) de procesos ARMA$(1,1)$



4.5. Procesos ARMA(p, q)

Modelo: El proceso ARMA(p, q) sigue el modelo

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q},$$

donde $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ y (a_t) es ruido blanco con varianza σ^2. Utilizando los operadores

$$\begin{aligned} \Phi_p(B) &= ... \\ \Theta_q(B) &= ... \end{aligned}$$

podemos escribir el modelo como

...

Condición de estacionariedad: El proceso es estacionario si las raíces de $\Phi_p(B)$ están fuera del círculo unidad.

Condición de invertibilidad: El proceso es invertible si las raíces de $\Theta_q(B)$ están fuera del círculo unidad.

Suponemos además sin pérdida de generalidad que $\Phi_p(B)$ y $\Theta_q(B)$ no tienen raíces comunes.

Representación MA(∞):

...

Los coeficientes del nuevo operador $\Psi(B)$ se obtienen igualando los coeficientes de las potencias B^j en la igualdad $\Psi(B)\Phi_p(B) = \Theta_q(B)$.

Representación AR(∞):

...

Los coeficientes del operador $\Pi(B)$ se obtienen de la igualdad $\Pi(B)\Theta_q(B) = \Phi_p(B)$.

Autocovarianzas: Multiplicando el modelo por $\tilde{Y}_{t-h}$ obtenemos

...

Tomando esperanzas obtenemos

$\gamma_h = ...$

Para $h > q$, todas las esperanzas que aparecen a la derecha son cero, con lo cual

$$\gamma_h = \ldots$$

Función de autocorrelación simple:

$$\rho_h = \ldots$$

✓ Los primeros q coeficientes de la *fas* no tienen por qué decrecer.

✓ A partir de ρ_{q+1}, la *fas* tiene un decrecimiento determinado por la parte AR.

✓ La *fap* tendrá estructura similar, intercambiando los papeles de $\Phi_p(B)$ y $\Theta_q(B)$.

Cuadro 4.1: Resumen

	fas	*fap*
AR(p)	decrecimiento como mezcla de exponenciales y senoidales	p primeros coeficientes no nulos, el resto cero
MA(q)	q primeros coeficientes no nulos el resto cero	decrecimiento como mezcla de exponenciales y senoidales
ARMA(p, q)	decrecimiento hacia cero desde q	decrecimiento hacia cero desde p

4.6. Sumas de procesos estacionarios independientes

Ejemplo 36 *AR(1) con error de medida. Consideremos el proceso definido por*

$$Z_t = Y_t + v_t$$

donde Y_t es un $AR(1)$, es decir, verifica

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + a_t$$

y donde (a_t) y (v_t) son ruidos blancos independientes con varianzas $Var(a_t) = \sigma^2$ y $Var(v_t) = \sigma_v^2$. La varianza de Z_t es

$$\begin{aligned} \gamma_0^z &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Las autocovarianzas son

$$\begin{aligned}\gamma_h^z &= ...\\ &= ...\end{aligned}$$

Concretamente, para $h=1$*, reemplazando* $\gamma_0^y = \gamma_0^z - \sigma_v^2$*, se obtiene*

$$\gamma_1^z = ...$$

En resumen, las autocovarianzas son

$$\gamma_h^z = \begin{cases} ... \qquad , & h=0\\ ... \qquad\quad , & h=1\\ ... \qquad , & h\geq 2\end{cases}$$

La fas *es:*

$$\rho_h^z = \begin{cases} ... \qquad\qquad , & h=1\\ \\ ... \qquad , & h\geq 2\end{cases}$$

Comparando este resultado con la fas *de un* $ARMA(1,1)$*, concluimos que* (Z_t) *es un* $ARMA(1,1)$*.*

Álgebra de los procesos estacionarios independientes:

- ✓ AR(p)+MA(q)=ARMA($p, p+q$).
- ✓ AR(p_1)+AR(p_2)=ARMA($p_1+p_2, \text{máx}\{p_1,p_2\}$).
- ✓ MA(q_1)+MA(q_2)=MA($\text{máx}\{q_1,q_2\}$).

Por esta razón, muchos fenómenos se pueden describir por procesos ARMA.