Capítulo 3

Procesos autorregresivos

Los procesos autorregresivos deben su nombre a la regresión y son los primeros procesos estacionarios que se estudiaron.

Proceso autorregresivo: Un proceso autorregresivo de orden p, AR(p), es un proceso estocástico $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ que sigue el modelo

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + a_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

En esta ecuación:

- $c, \phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathbb{R}$ son constantes;
- El proceso (a_t) es un ruido blanco con varianza σ^2. Los a_t se llaman *innovaciones*, ya que representan la nueva información que aparece en cada instante.
- ¿Influye a_t en los valores posteriores del proceso Y_{t+h}, $h \geq 0$? ...
  ¿Y en los pasados Y_{t-h}, $h > 0$? ...
- El valor actual de la serie es una función lineal de los valores anteriores y la innovación actual. El proceso se puede expresar como una función lineal de todas las innovaciones anteriores.
- ¿Depende Y_t de los valores pasados anteriores a Y_{t-p}? ...

3.1. Proceso autorregresivo de primer orden: AR(1)

Modelo: Un proceso AR(1) está generado por

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + a_t, \quad |\phi_1| < 1. \tag{3.2}$$

Solución general: Sustituir la ecuación para $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-k}$ sucesivamente en Y_t,

$$\begin{aligned} Y_t &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Suponemos que la serie está definida para todo $t \in \mathbb{Z}$. Tomando límite cuando $k \to \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} Y_t &= \ldots \\ &= \ldots \qquad\qquad . \end{aligned} \tag{3.3}$$

✓ ¿Qué debe verificar ϕ_1 para que esto converja? ...

✓ ¿Depende Y_t de las innovaciones futuras? ...

Esperanza: Tomando esperanza en (3.3),

$$E(Y_t) = \ldots$$

✓ ¿Cuándo es esto menor que ∞? ...

✓ ¿Es la serie estable en media? ...

Determinación de c: Obtener el valor de c despejando en la fórmula anterior:

$$c = \ldots$$

Sustituir c en la fórmula del proceso (3.2):

$$Y_t = \ldots$$

Llamar $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ a la serie centrada y obtener la ecuación para $\tilde{Y}_t$:

$$... \tag{3.4}$$

✓ A partir de ahora supondremos que el proceso es estacionario.

Varianza: Elevar (3.4) al cuadrado:

$$\tilde{Y}_t^2 = \phi_1^2 \tilde{Y}_{t-1}^2 + 2\phi_1 \tilde{Y}_{t-1} a_t + a_t^2.$$

Tomar esperanzas, teniendo en cuenta que $\tilde{Y}_{t-1}$ no depende de la innovación futura a_t:

$$\gamma_0 = ...$$

Despejar γ_0:

$$\gamma_0 = ...$$

✓ ¿Cuándo es esto finito y positivo? ...

✓ ¿Es la varianza del proceso mayor o menor que σ^2? ...

Autocovarianzas: Multiplicar la ecuación de $\tilde{Y}_t$ por $\tilde{Y}_{t-h}$:

...

y tomando esperanzas,

$\gamma_h = ...$

obtenemos la ecuación en diferencias

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1}, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Solución de la ecuación en diferencias:

...

Función de autocorrelación simple:

...

✓ Como $|\phi_1| < 1$, en un AR(1) las autocorrelaciones decrecen geométricamente hacia cero cuando $h \to \infty$.

Condición de estacionariedad: El AR(1) es estacionario en sentido débil si

$$|\phi_1| < 1.$$

Representación media móvil de orden infinito MA(∞): Expresamos el proceso AR(1) como suma ponderada de las innovaciones anteriores, reemplazando las ecuaciones de $\tilde{Y}_{t-1}, \ldots, \tilde{Y}_{t-k}$ en $\tilde{Y}_t$ y tomando límite cuando $k \to \infty$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{Y}_t & = & \ldots \\ & = & \ldots \\ & = & \ldots \\ & = & \ldots \\ & = & \ldots \\ & & \ldots \\ & = & \ldots \\ & \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} & \ldots \end{array}$$

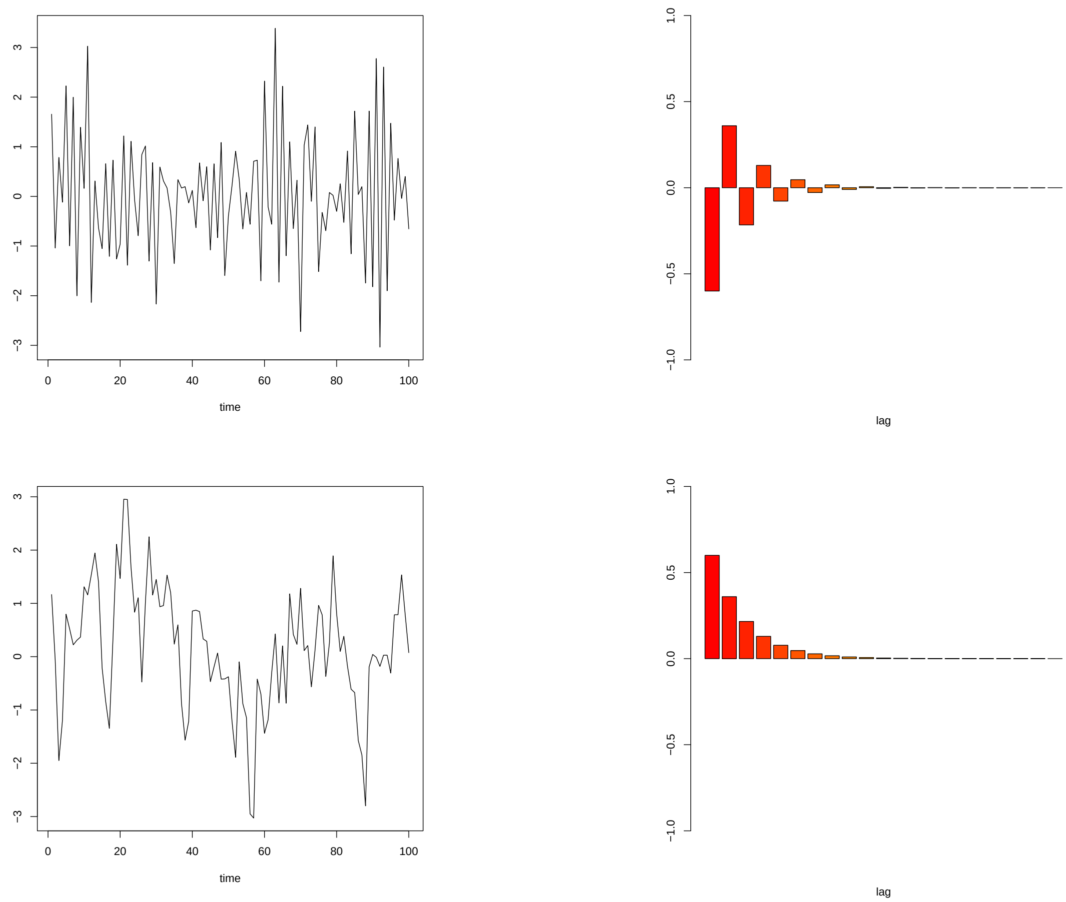
Esta representación del AR(1) es válida sólo bajo el supuesto de que $|\phi_1| < 1$; es decir, de que el proceso sea estacionario en sentido débil. Otra forma de obtener esa representación es multiplicando la ecuación del proceso por

$$(1 - \phi_1 B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\phi_1 B)^i.$$

✓ El proceso es una función lineal de las innovaciones anteriores, con pesos decrecientes al alejarnos en el pasado.

$$\tilde{Y}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i a_{t-i}.$$

Figura 3.1: Procesos AR(1): trayectorias (izq.) y fas (der.) para $\phi_1 = \mp 0{,}6$



Distribución marginal vs. distribución predictiva

- Distribución marginal de Y_t: Es estacionaria y su variabilidad es la suma de las variabilidades debido al desconocimiento del valor anterior, Y_{t-1}, y de la innovación a_t,

$$E(Y_t) = ...$$
$$Var(Y_t) = ...$$

- Distribución predictiva (o condicionada al pasado del proceso): Esta verifica

$$E(Y_t|Y_{t-1} = y) = ...$$
$$Var(Y_t|Y_{t-1} = y) = ...$$

¿Es la varianza condicionada mayor o menor que la varianza marginal?
...

3.2. Proceso autorregresivo de segundo orden: AR(2)

Modelo: El proceso autorregresivo de segundo orden, o AR(2), sigue la ecuación

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + a_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

Esperanza: Asumimos que el proceso es estacionario y tomamos esperanzas en la ecuación del proceso:

...

Despejando μ, obtenemos

...

¿Cuándo es la media finita? ...

Determinación de c: Despejamos c en función de μ:

...

Reemplazamos esta constante en la ecuación del proceso (3.5) y llamamos $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ a las variables centradas. La ecuación del proceso en función de $\tilde{Y}_t$ es

... (3.6)

Escribir la ecuación del proceso AR(2) utilizando la notación del operador retardo:

... (3.7)

Ecuación característica: Es la ecuación que se obtiene de igualar el operador a 0,

... (3.8)

Varianza: Elevamos la expresión (3.6) al cuadrado,

...

Tomando esperanzas, obtenemos la ecuación

...

Esta expresión depende de la autocovarianza de orden 1, γ_1.

Función de autocovarianzas: Multiplicamos (3.6) por $\tilde{Y}_{t-h}$,

...

y tomamos esperanzas

...

Para $h = 1$ obtenemos

...

Reemplazamos esto en la ecuación para la varianza y despejamos γ_0:

...

...

...

Por lo tanto, la varianza es

$$\gamma_0 = ...$$

Para que esta varianza sea positiva, el numerador y el denominador tienen que tener el mismo signo. Esto ocurre si

$$-1 < \phi_2 < 1; \quad \phi_1 + \phi_2 < 1; \quad \phi_2 - \phi_1 < 1.$$

Función de autocorrelación: Dividiendo la función de autocovarianzas entre la varianza, se obtiene

$$... \tag{3.9}$$

Para $h = 1$ tenemos

...

Para $h = 2$,

...

Solución general de la recursión: Sean G_1^{-1} y G_2^{-1} las raíces de la ecuación característica. Hay tres posibilidades:

(a) G_1 y G_2 son reales y distintas: Entonces la solución general es

$$...$$

Los coeficientes A_1 y A_2 son constantes determinadas por condiciones iniciales.
¿Qué ocurre si algún $|G_i| > 1$? ...
¿ Y si $|G_i| < 1, i = 1, 2$? ...
La forma de la *fas* depende de si G_1 y G_2 tienen signos iguales o distintos.

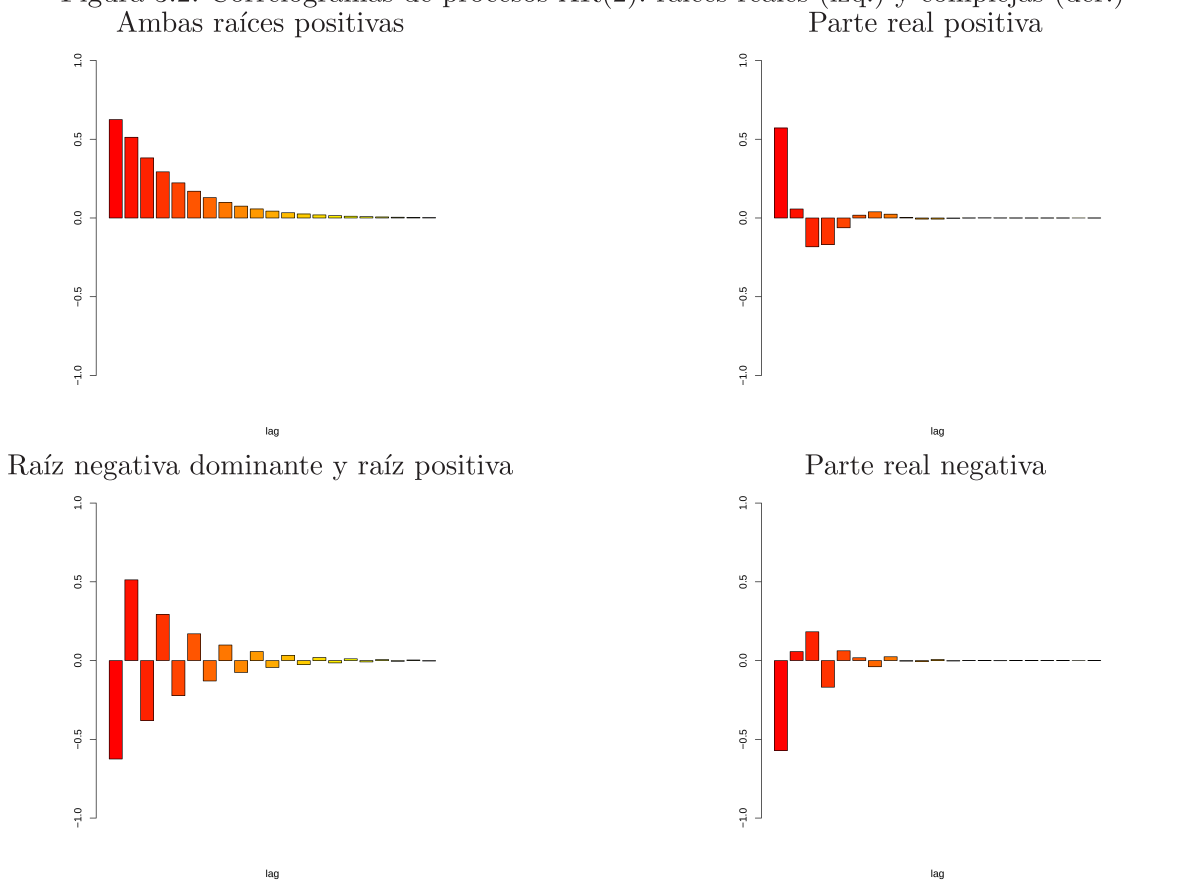
(b) G_1 y G_2 son reales e iguales: Entonces la solución general es

$$...$$

que decrece sólo si $|G_1| < 1$.

(c) G_1 y G_2 son complejos conjugados: De nuevo, si $|G_i| < 1$, $i = 1, 2$, entonces ρ_h decrecerá de forma sinusoidal.

Figura 3.2: Correlogramas de procesos AR(2): raíces reales (izq.) y complejas (der.)



Condición de estacionaridad: Una solución general del proceso se obtiene resolviendo la ecuación característica con B como incógnita. Las soluciones pueden ser reales o complejas conjugadas. Llamamos G_1^{-1} y G_2^{-1} a las soluciones. Las condiciones de estacionariedad son:

$$|G_i| < 1, \quad i = 1, 2.$$

En términos de los coeficientes del proceso, las condiciones son:

$$-1 < \phi_2 < 1; \quad \phi_1 + \phi_2 < 1; \quad \phi_2 - \phi_1 < 1.$$

Representación MA(∞) del proceso: El proceso AR(2) se puede expresar en función de las innovaciones anteriores. Par ello, consideremos el operador inverso

$$\psi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)^{-1} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots$$

Los coeficientes ψ_i se pueden determinar realizando el producto

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1,$$

agrupando los coeficients de cada potencia de B e igualándolos a cero,

...

...

...

...

...

Obsérvese que esta ecuación para los coeficientes ψ_h es igual a la ecuación para las autocorrelaciones.
Multiplicando la ecuación del proceso (3.7) por $\psi(B) = 1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\cdots$ obtenemos

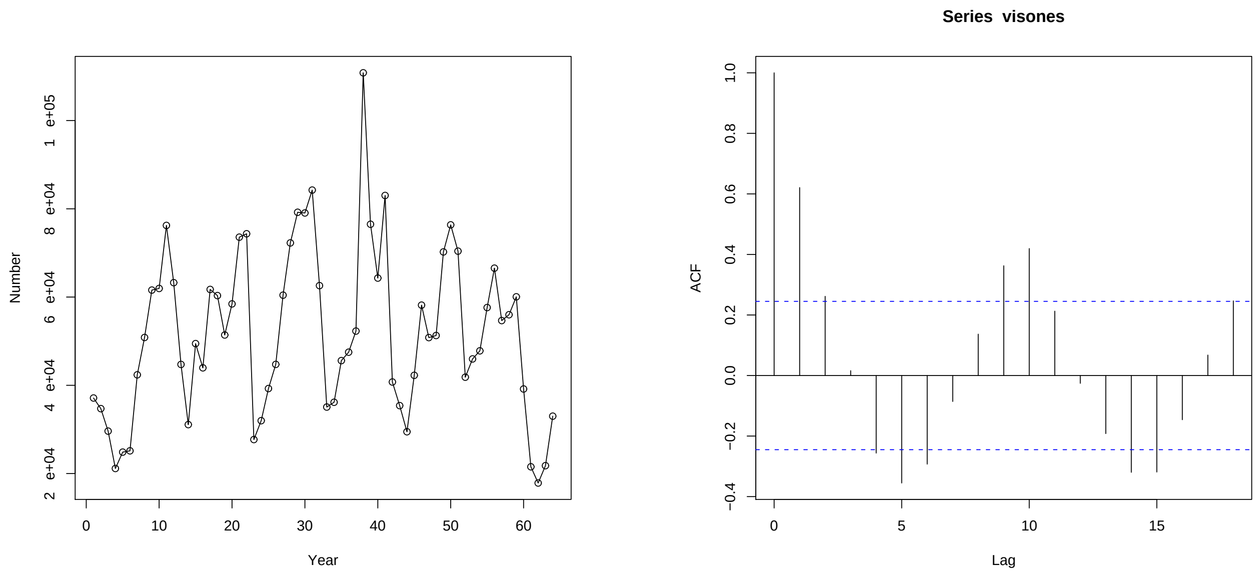
...

Distribución predictiva (condicionada al pasado del proceso):

$$E(Y_t|Y_{t-1} = y_{t-1}, Y_{t-2} = y_{t-2}) = ...$$
$$Var(Y_t|Y_{t-1} = y_{t-1}, Y_{t-2} = y_{t-2}) = ...$$

Ejemplo 34 *Visones atrapados en Canada, 1848-1911 (no. 27). La Figura 3.3 muestra el gráfico de la serie y su correlograma. Se puede observar el comportamiento periódico de la serie en ambos gráficos.*

Figura 3.3: Número de visones y su correlograma



Ejemplo 35 *Considera el proceso* $AR(2)$ *definido por:*

$$Y_t = 10 - 0{,}4Y_{t-1} + 0{,}5Y_{t-2} + a_t$$

Comprueba que es estacionario.

3.3. Proceso autorregresivo general AR(p)

Modelo: El proceso autorregresivo de orden p sigue la ecuación:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + a_t,$$

donde $c, \phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathbb{R}$ y (a_t) es un ruido blanco con varianza σ^2.

Esperanza: Si el proceso AR(p) es estacionario, tomando esperanza

$$\ldots$$

Determinación de c**:** Despejamos c en función de μ:

$$\ldots$$

Reemplazamos c en la fórmula del modelo y llamamos $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ al proceso en desviaciones a su media:

$$... \tag{3.10}$$

En función del operador retardo, la ecuación es

$$... \tag{3.11}$$

o, llamando $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ al polinomio de grado p en B, la ecuación es

...

Ecuación característica: La ecuación característica del proceso es

...

Suponemos que tiene p raíces distintas y las llamamos $G_1^{-1}, \ldots, G_p^{-1}$. Entonces podemos escribir

$$\Phi_p(B) = (1 - G_1 B) \cdots (1 - G_p B) = 0.$$

Varianza: Multiplicamos (3.10) por $\tilde{Y}_t$:

...

y tomando esperanzas obtenemos

$$Var(Y_t) = \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \cdots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2$$

Autocovarianzas: Multiplicando (3.10) por $\tilde{Y}_{t-h}$ obtenemos

...

y tomando esperanzas, obtenemos

...

Autocorrelaciones: Dividiendo por γ_0, obtenemos

$$... \tag{3.12}$$

que podemos escribir en función del operador retardo como

...

Solución general de la recursión: Sean $G_1^{-1}, \ldots, G_p^{-1}$ las soluciones de la ecuación característica, suponiendo que son todas distintas. La solución general de la ecuación en diferencias para ρ_h es:

$$\rho_h = \sum_{i=1}^{p} A_i G_i^h.$$

Obsérvese que las autocorrelaciones decrecerán sólo si $|G_i| < 1$, $i = 1, \ldots, p$. En este caso, si G_i es real, entonces G_i^h decrece exponencialmente con h. Si G_i es compleja, entonces G_i^h es una función sinusoidal cuya amplitud decrece exponencialmente con h. En cualquier caso, si $|G_i| < 1$, $i = 1, \ldots, p$, entonces se verifica

$$\rho_h \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to \infty.$$

Condición de estacionaridad: $|G_i| < 1$, $i = 1, \ldots, p$, análoga a la de un AR(2).

Ecuaciones de Yule-Walker: Si en la fórmula (3.12) tomamos las p primeras autocorrelaciones, es decir, tomamos $h = 1, \ldots, p$, obtenemos el siguiente sistema de p ecuaciones que relaciona $\rho_1, \ldots, \rho_p$ con $\phi_1, \ldots, \phi_p$:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2} \\
\vdots &= \vdots \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p
\end{aligned}$$

De este sistema podríamos despejar los coeficientes $\phi_1, \ldots, \phi_p$ en función de las autocorrelaciones. En forma matricial, el sistema es

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & \rho_0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\rho} & = & \mathbf{R} & \times & \boldsymbol{\phi}
\end{array} \tag{3.13}$$

Despejando $\boldsymbol{\phi}$, se obtiene $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\rho}$.

Representación MA(∞): Multiplicando (3.11) por el operador inverso

$$\Psi(B) = \Phi_p(B)^{-1} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots$$

obtenemos $\tilde{Y}_t$ en función de las innovaciones hasta t,

$\tilde{Y}_t = \ldots$

donde el operador $\Psi(B)$ verifica

$$\Phi_p(B)\Psi(B) = 1 \Leftrightarrow (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1.$$

Los coeficientes ψ_h se pueden obtener a partir de los coeficientes $\phi_1, \ldots, \phi_p$. Agrupando los coeficientes con la misma potencia de B e igualando a cero, obtenemos

...

...

...

...

...

Finalmente, para $h \geq p$,

...

3.4. La función de autocorrelación parcial

Determinar el orden p del proceso a partir de la *fas* es difícil, ya que esta función es una mezcla de decrecimientos exponenciales y sinusoidales y no tiene rasgos fácilmente identificables.

Idea clave: En un proceso AR(1), Y_{t-2} influye sobre Y_t sólo a tráves de Y_{t-1}, ya que

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + a_t = \phi_1(\phi_1 \tilde{Y}_{t-2} + a_{t-1}) + a_t.$$

Podemos escribir $\tilde{Y}_t$ e $\tilde{Y}_{t-2}$ en función de $\tilde{Y}_{t-1}$, de la forma

$$\begin{aligned} &\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + a_t; \\ &\tilde{Y}_{t-1} = \phi_1 \tilde{Y}_{t-2} + a_{t-1} \Leftrightarrow \tilde{Y}_{t-2} = \frac{\tilde{Y}_{t-1} - a_{t-1}}{\phi_1}. \end{aligned}$$

Si se conoce el valor de $\tilde{Y}_{t-1}$, entonces $\tilde{Y}_{t-2}$ ya no influye en Y_t. Así, si podemos eliminar el efecto de $\tilde{Y}_{t-1}$ en ambas variables, la correlación entre las variables resultantes será cero.
Igualmente, en un AR(2), $\tilde{Y}_{t-3}$ influye en $\tilde{Y}_t$ solo a través de $\tilde{Y}_{t-1}$ y de $\tilde{Y}_{t-2}$. Si eliminamos los efectos de estas dos variables de $\tilde{Y}_{t-3}$ y de $\tilde{Y}_t$, entonces estarían incorreladas.

Coeficiente de autocorrelación parcial de orden h: Es la correlación entre observaciones separadas por h instantes después de eliminar la correlación producida por las observaciones intermedias.

Procedimiento para obtener la autocorrelación parcial:

1. Eliminar de $\tilde{y}_t$ el efecto lineal de $\tilde{y}_{t-1}, \ldots, \tilde{y}_{t-h+1}$ mediante la regresión
$$\tilde{y}_t = \beta_1 \tilde{y}_{t-1} + \cdots + \beta_{h-1} \tilde{y}_{t-h+1} + u_t$$
2. Eliminar de $\tilde{y}_{t-h}$ el efecto lineal de $\tilde{y}_{t-1}, \ldots, \tilde{y}_{t-h+1}$ mediante la regresión
$$\tilde{y}_{t-h} = \gamma_1 \tilde{y}_{t-1} + \cdots + \gamma_{h-1} \tilde{y}_{t-h+1} + v_t$$
3. Calcular la correlación simple entre los residuos $\hat{u}_t$ y $\hat{v}_t$, ya que contienen la parte de $\tilde{y}_t$ y $\tilde{y}_{t-h}$, respectivamente, no común con las observaciones intermedias.

Las tres etapas anteriores equivalen a ajustar la regresión múltiple
$$\tilde{y}_t = \alpha_{h1} \tilde{y}_{t-1} + \cdots + \alpha_{h,h-1} \tilde{y}_{t-h+1} + \alpha_{hh} \tilde{y}_{t-h} + \epsilon_t$$
donde el coeficiente α_{hh} de $\tilde{y}_{t-h}$ es el coeficiente de autocorrelación parcial de orden h.

Función de autocorrelación parcial (fap): es la representación de los coeficientes de autocorrelación parcial en función del retardo. Ajustando las regresiones
$$\begin{array}{rcl} \tilde{y}_t &=& \alpha_{11} \tilde{y}_{t-1} + \epsilon_{1t} \\ \tilde{y}_t &=& \alpha_{21} \tilde{y}_{t-1} + \alpha_{22} \tilde{y}_{t-2} + \epsilon_{2t} \\ \tilde{y}_t &=& \alpha_{31} \tilde{y}_{t-1} + \alpha_{32} \tilde{y}_{t-2} + \alpha_{33} \tilde{y}_{t-3} + \epsilon_{3t} \\ \vdots && \vdots \end{array}$$
la función de autocorrelación parcial es la secuencia $\phi_h = \alpha_{hh}$, $h \in \mathbb{N}$.

✓ En un proceso AR(p) la *fap* ϕ_h verifica:
$$\phi_h \neq 0 \text{ para } h \leq p \quad \text{y} \quad \phi_h = 0, \text{ para } h > p.$$
Por tanto, graficando la *fap* en función del retardo podemos identificar el orden p de un proceso AR(p).

Figura 3.4: *Fas* y *fap* para procesos AR(p)

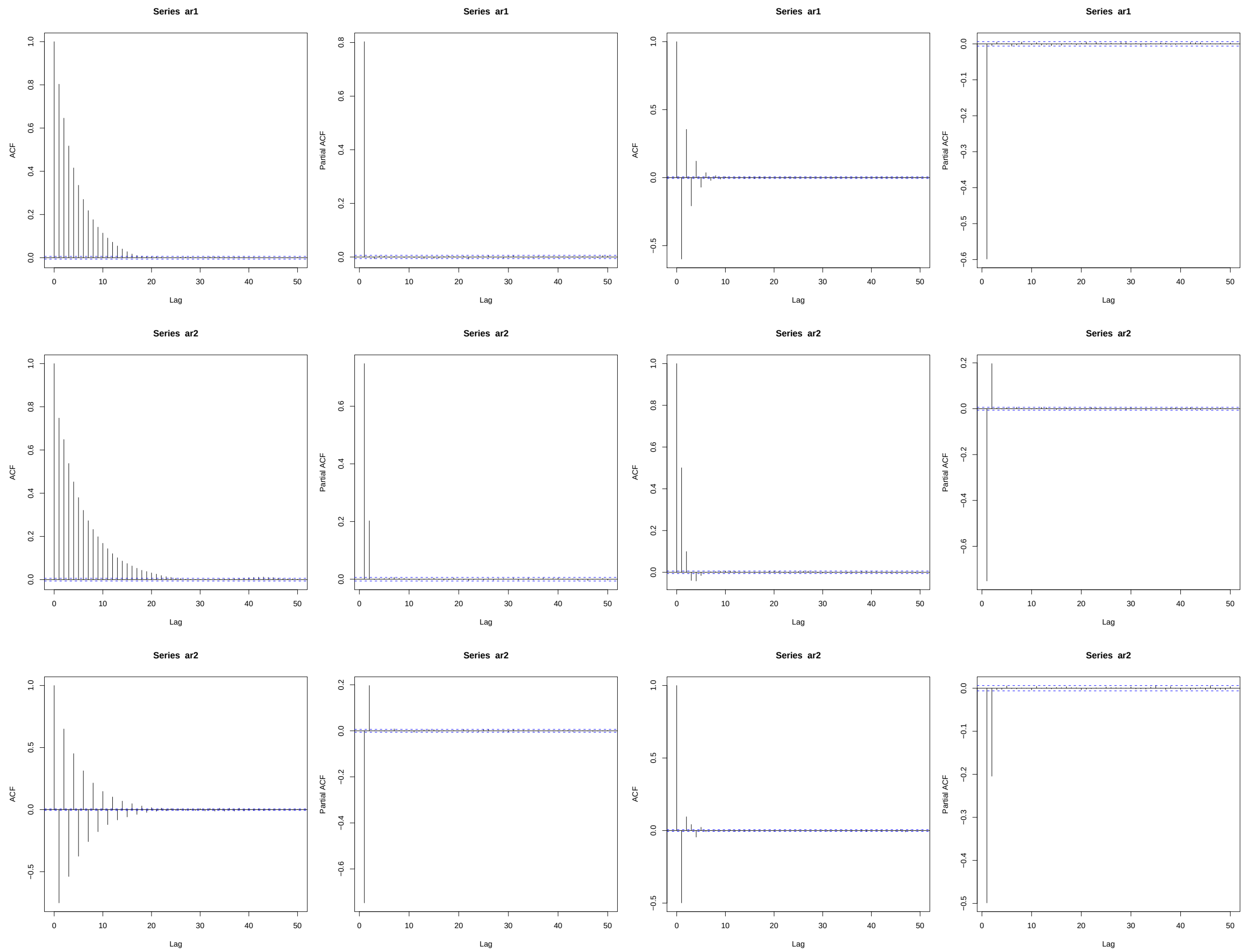


Figura 3.5: *Fas* y *fap* para la serie de los visones