SOLUCIONES PRÁCTICA 6: SERIES TEMPORALES
DIPLOMADO EN ESTADÍSTICA

Problema 1 Calcular las primeras 12 autocorrelaciones simples teóricas del proceso

$$(1-0{,}8B)Y_t = (1-0{,}5B^{12})a_t$$

utilizando tanto la fórmula exacta de los apuntes como la aproximación y comparar los resultados. ¿De los gráficos mostrados en las Figuras 1 y 2, cuáles son de este proceso?

Solución: El modelo es un ARIMA$(0,0,1)_{12} \times (1,0,0)$, que se compone de un AR(1) con coeficiente $\phi_1 = 0{,}8$ para la parte regular y de un MA$(1)_{12}$ con coeficiente $\Theta_1 = 0{,}5$ para la parte estacional. La función de autocorrelación para la parte regular es

$$r_h = 0{,}8^h, \quad h = 1, 2, \ldots$$

La función de autocorrelación de la parte estacional es

$$R_{12k} = \begin{cases} -\frac{0{,}5}{1+0{,}5^2} = -0{,}4, & k = 1; \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

La función de autocorrelación para el modelo completo viene dada por

$$\rho_h = \frac{r_h + \sum_{k=1}^{\infty} R_{12k}(r_{12k-h} + r_{12k+h})}{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r_{12k}R_{12k}} = \frac{r_h + R_{12}(r_{12-h} + r_{12+h})}{1 + 2\,r_{12}R_{12}}.$$

El denominador es constante ya que no depende de h, y vale

$$1 + 2\,r_{12}R_{12} = 1 + 2(0{,}8^{12})(-0{,}4) = 0{,}94.$$

Por tanto, la función de autocorrelación es

$$\rho_h = \frac{r_h - 0{,}4(r_{12-h} + r_{12+h})}{0{,}94}.$$

Reemplazando $h = 1, 2, \ldots, 12$, obtenemos

$$\rho_1 = 0{,}780,\ \rho_2 = 0{,}616,\ \rho_3 = 0{,}472,\ \rho_4 = 0{,}352,\ \rho_5 = 0{,}250,\ \rho_6 = 0{,}151,$$
$$\rho_7 = 0{,}077,\ \rho_8 \cong 0,\ \rho_9 = -0{,}08,\ \rho_{10} = -0{,}161,\ \rho_{11} = -0{,}251,\ \rho_{12} = -0{,}354.$$

Utilizando la aproximación, tenemos que

$$\rho_h = \begin{cases} r_h, & h = 1,2,3,4,5,6; \\ R_{12}\, r_{|12-h|}, & h = 7,8,9,10,11; \\ R_{12}, & h = 12. \end{cases}$$

Reemplazando, obtenemos

$$\rho_1 = 0{,}8,\ \rho_2 = 0{,}640,\ \rho_3 = 0{,}512,\ \rho_4 = 0{,}409,\ \rho_5 = 0{,}328,\ \rho_6 = 0{,}262,$$
$$\rho_7 = -0{,}131,\ \rho_8 \cong -0{,}4,\ \rho_9 = -0{,}164,\ \rho_{10} = -0{,}205,\ \rho_{11} = -0{,}256,\ \rho_{12} = -0{,}320.$$

Estas autocorrelaciones se corresponden con el gráfico de la serie 4 de la Figura 1.

Problema 2 Identificar un modelo ARIMA para la serie de los viajeros en avión siguiendo los siguientes pasos:

a) Determinar una transformación para estabilizar la varianza.

```
viajeros=read.table("airpass.txt")
viajeros=as.matrix(viajeros)
plot(viajeros)
lines(viajeros)
n=nrow(viajeros)
me=rep(0,12)
dt=me
for (i in 1:12){me[i]=mean(viajeros[((i-1)*12+1):(i*12)])
dt[i]=sqrt(var(viajeros[((i-1)*12+1):(i*12)]))}
plot(me,dt)
lm(log(dt)~log(me))
logviajeros=log(viajeros)
plot(logviajeros)
lines(logviajeros)
```

b) ¿Cuantas diferencias regulares necesitamos para eliminar la tendencia?

```
acf(logviajeros)
dlviajeros=logviajeros[2:144]-logviajeros[1:143]
plot(dlviajeros)
lines(dlviajeros)
acf(dlviajeros,lag.max=30)
```

c) ¿Cuantas diferencias estacionales necesitamos para eliminar estacionalidad?

```
Ddlviajeros=dlviajeros[13:143]-dlviajeros[1:131]
plot(Ddlviajeros)
lines(Ddlviajeros)
acf(Ddlviajeros,lag.max=30)
```

d) Determinar los órdenes de un modelo ARMA estacional para la serie transformada.

```
acf(Ddlviajeros,lag.max=30)
pacf(Ddlviajeros,lag.max=30)
```

Problema 3 Generar una serie de tamaño $n = 100$ del modelo AR(2),

$$Y_t = 0{,}5 + 0{,}5Y_{t-1} + 0{,}45Y_{t-2}$$

y analizarla realizando los siguientes apartados:

a) Analizar la *fas* y la *fap*.

```
ser1=arima.sim(n=100,list(ar=c(0.5,0.4)))
ser1=ser1+10
acf(ser1)
pacf(ser1)
```

b) Ajustar modelos AR(1) y AR(2) utilizando los estimadores de Yule-Walker.

```
acf(ser1,plot=FALSE)
```

c) Ajustar modelos AR(1), AR(2) y AR(3) utilizando máxima verosimilitud condicionada y exacta.

```
arima(ser1,order=c(1,0,0),method="CSS")
# ajustar AR(1) y media simultaneamente por MQ condic.
arima(ser1,order=c(1,0,0),method="ML")
# ajustar AR(1) y media simultaneamente por MV exacta
mean(ser1)
ser1n=ser1-mean(ser1)
arima(ser1n,order=c(1,0,0),method="CSS-ML",include.mean=FALSE)
```

d) Comparar los resultados de los apartados anteriores con el modelo verdadero AR(2).

Problema 4 Calcular las primeras 12 autocorrelaciones simples teóricas del proceso

$$(1 - 0{,}5B^{12})Y_t = (1 - 0{,}8B)a_t$$

utilizando tanto la fórmula exacta de los apuntes como la aproximación y comparar los resultados. ¿De los gráficos mostrados en las Figuras 1 y 2, cuáles son de este proceso?

Solución: El modelo es un ARIMA$(1,0,0)_{12} \times (0,0,1)$, que se compone de un AR$(1)_{12}$ con coeficiente $\Phi_1 = 0{,}5$ para la parte estacional, y un MA(1) con coeficiente $\theta_1 = 0{,}8$ para la parte regular. La función de autocorrelación de la parte regular es

$$r_h = \begin{cases} -\frac{0{,}8}{1+0{,}8^2} = -0{,}49, & h = 1; \\ 0, & h > 1. \end{cases}$$

Para la parte estacional tenemos un AR$(1)_{12}$, cuya función de autocorrelación es

$$R_{12k} = (0{,}5)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Por tanto, aplicando la fórmula teórica, la función de autocorrelación del modelo completo es

$$\rho_h = \frac{r_h + \sum_{k=1}^{\infty} R_{12k}(r_{12k-h} + r_{12k+h})}{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r_{12k}R_{12k}} = r_h + \sum_{k=1}^{\infty} R_{12k} r_{12k-h},$$

ya que $r_h = 0$ para $h > 1$. Además, r_{12k-h} será no nulo sólo si $h = 12k$, $h = 12k - 1$ ó $h = 12k + 1$. Por tanto, la función de autocorrelación es

$$\rho_h = \begin{cases} r_1 = -0{,}49, & h = 1 \\ 0, & h = 2, 3, \dots, 10; \\ R_{12k} r_1 = (0{,}5)^k(-0{,}49), & h = 12k - 1 \\ R_{12k} = (0{,}5)^k, & h = 12k \\ R_{12k} r_1 = (0{,}5)^k(-0{,}49), & h = 12k + 1 \end{cases}$$

Esta función coincide exactamente con la aproximación propuesta en los apuntes. Se corresponde con el gráfico de la serie 2 de la Figura 1.

Problema 5 Identificar un modelo ARIMA para la serie de los muertos por accidentes en los EE.UU.

Problema 6 Generar una serie de tamaño $n = 120$ del modelo AR(2),

$$Y_t = 1 + 0{,}5Y_{t-1} + 0{,}3Y_{t-2}$$

y analizar las primeras $n = 60$ y las ultimas $n = 60$ observaciones como dos series distintas por separado.

a) Analizar la *fas* y la *fap* de las series y compararlas.

b) Ajustar modelos AR(1), AR(2) y AR(3) a ambas series utilizando máxima verosimilitud condicionada.

c) Ajustar modelos AR(1), AR(2) y AR(3) a ambas series utilizando máxima verosimilitud exacta.

d) Comparar los resultados de los apartados anteriores, y comparar los resultados para las dos series.

Figura 1: *Fas* de procesos ARMA estacionales

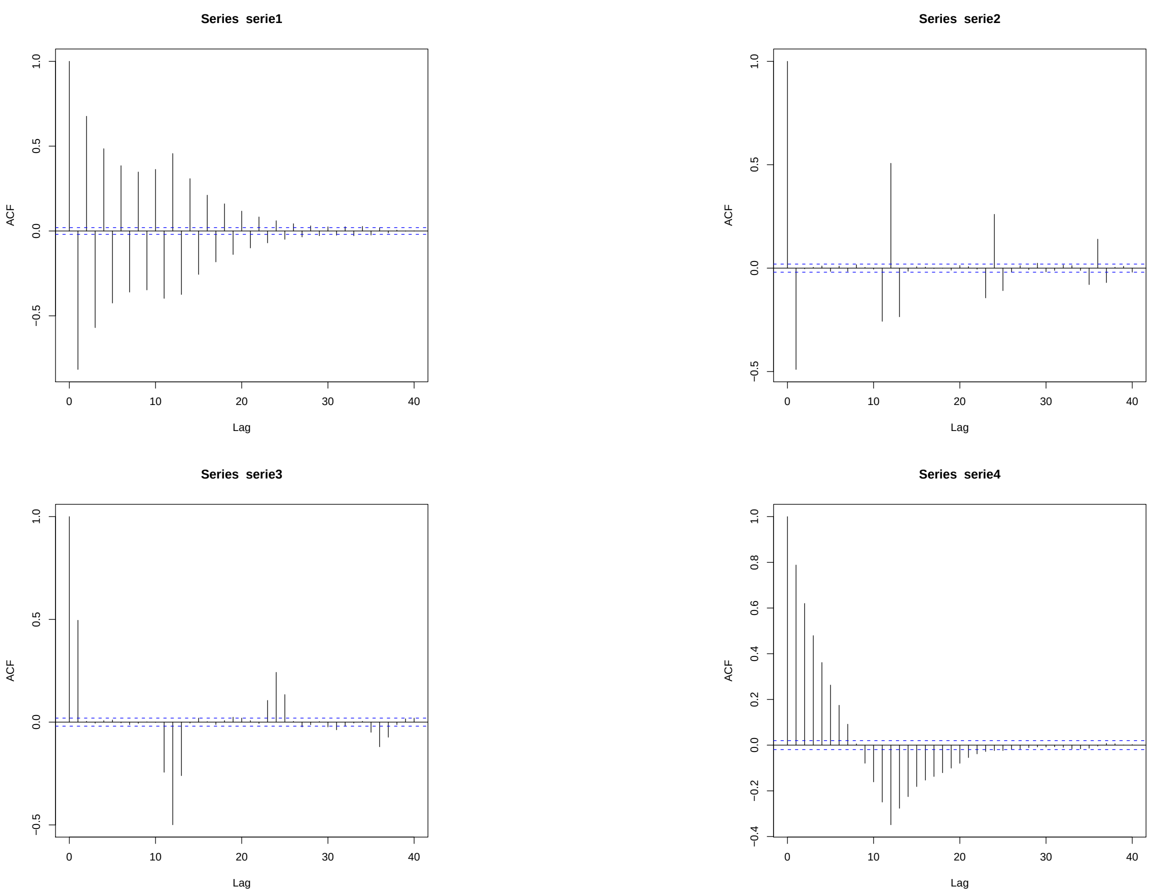

Figura 2: *Fap* de procesos ARMA estacionales