Asignatura	**:**	**INFERENCIA ESTADÍSTICA I**
Titulación	**:**	**DIPLOMADO EN ESTADÍSTICA**
Profesor	**:**	**ISABEL MOLINA PERALTA**
Capítulo 4	**:**	**MÉTODOS DE ESTIMACIÓN**

4.1. MÉTODO DE LOS MOMENTOS

Consideremos una población con distribución dependiente de K parámetros desconocidos $\theta_1, \ldots, \theta_K$. Los momentos poblacionales (si existen) son en general función de $\theta_1, \ldots, \theta_K$.

Momentos poblacionales:

$$\alpha_r = E(X^r) = \alpha_r(\theta_1, \ldots, \theta_K), \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Momentos muestrales:

$$a_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Método de los momentos: Igualar los K primeros momentos poblacionales no nulos a sus correspondientes K momentos muestrales, y resolver el sistema de ecuaciones para $(\theta_1, \ldots, \theta_K)$:

$$\alpha_r(\theta_1, \ldots, \theta_K) = a_r, \quad r = 1, \ldots, K.$$

Ejemplo 1 Sea X una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$ y sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de X. Obtener estimadores de μ y σ^2 por el método de los momentos.

Ejemplo 2 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. $X \sim U(0, \theta)$. Obtener el estimador de θ por el método de los momentos.

Nota 1 Si los parámetros desconocidos se pueden escribir de la forma $\theta_i = g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$, donde g_i es continua, $i = 1, \ldots, K$, entonces los estimadores de los momentos son $\hat{\theta}_i = g_i(a_1, \ldots, a_K)$, $i = 1, \ldots, K$.

Proposición 1 (Consistencia de los estimadores de momentos)
Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. X dependiente de los parámetros desconocidos $\theta_1, \ldots, \theta_K$, tal que

$$E[(X^k - \alpha_k)^2 < \infty, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Supongamos que $\theta_i = g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$, donde g_i es continua, $i = 1, \ldots, K$. Entonces,

$$\hat{\theta}_i = g_i(a_1, \ldots, a_K) \xrightarrow{m.c.} \theta_i, \quad i = 1, \ldots, K.$$

Prueba:

4.2 MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Ejemplo 3 Lanzamiento de una moneda dos veces de forma independiente.

X: Número de caras obtenidas en los dos lanzamientos.

$X \sim Bin(n = 2, \theta)$, $\theta = P(\text{cara}) \in \{0{,}2, 0{,}8\}$.

$$p(x;\theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x}, \quad x = 0, 1, 2.$$

θ	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
0.2	0.64	0.32	0.04
0.8	0.04	0.32	0.64

Estimación de θ:
$x = 0 \rightarrow \hat{\theta} = 0{,}2, \quad x = 2 \rightarrow \hat{\theta} = 0{,}8, \quad x = 1 \rightarrow \hat{\theta} = 0{,}2$ ó $\hat{\theta} = 0{,}8$.

Idea: Estimar θ con el valor para el cual la probabilidad de que ocurra lo que se ha observado sea máxima, es decir, seleccionar el valor de θ más creible (más verosímil) si se ha observado la muestra $(x_1, \ldots, x_n)$, .

Estimador máximo-verosímil: Sea $(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ la realización de una m.a.s. de una población con f.d. $F(\,\cdot\,;\theta)$, $\theta \in \Theta$, donde $\theta \in I\!R^K$. El *estimador máximo-verosímil* (EMV) de θ es la cantidad $\hat{\theta}$ que verifica

$$L(\hat{\theta}; x_1, \ldots, x_n) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, \ldots, x_n).$$

Nota 2 A menudo los EMV se obtienen a partir de la logverosimilitud

$$l(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \log L(\theta; x_1, \ldots, x_n).$$

Nota 3 Posibilidades

(a) Θ finito $\to$ evaluar la verosimilitud $L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ en cada elemento de Θ y seleccionar el máximo.

(b) Θ infinito: Dos posibilidades

(b.1) $L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ derivable respecto de $\theta\!\to$ Resolver las *ecuaciones de máxima verosimilitud*

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Comparar las soluciones obtenidas entre sí y con los valores de la frontera de Θ para encontrar el máximo global.

(b.2) $L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ no derivable respecto de $\theta \rightarrow$ Buscar los máximos estudiando el crecimiento y decrecimiento de la verosimilitud.

Ejemplo 4 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Obténganse los EMV de μ y σ^2.

✓ Los EMV no tienen por qué ser insesgados.

Ejemplo 5 Considera el experimento del Ejemplo 3 pero con el espacio paramétrico continuo $\Theta = [0, 1]$. Calcula el EMV de θ según el método descrito en la Nota 3.

Verosimilitud no continua en Θ:

Ejemplo 6 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de $X \sim U[0, \theta]$. Calcular el EMV de θ.

✓ El EMV no tiene por qué ser único.

Proposición 2 Si existe un estimador centrado y eficiente para θ, entonces ése es el único EMV de θ.

Ejemplo 7 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de $X \sim U[\theta - 1, \theta + 1]$. Obténgase el EMV de θ.

✓ El EMV es función de cualquier estadístico suficiente; sin embargo, esta función no tiene por qué ser biyectiva. Por tanto, el EMV no tiene por que ser suficiente.

Ejemplo 8 Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una $U[\theta, 2\theta]$. Obtener un estadístico suficiente para θ y el EMV de θ. ¿Es el EMV suficiente?

Proposición 3 El EMV es invariante respecto de transformaciones biunívocas del parámetro. Es decir, si $\omega = h(\theta)$, donde h es biyectiva y $\hat{\theta}$ es el EMV de θ, entonces $\hat{\omega} = h(\hat{\theta})$ es el EMV de ω.

Prueba:

Ejemplo 9 La duración de cierto tipo de lámparas es exponencial de media desconocida θ. Después de observar la vida de n de ellas, estimar la probabilidad de que la duración de una de tales lámparas sea superior a 500 horas.

Teorema 1 Sea $f(x;\theta)$ la función de densidad (o de cuantía) de una v.a. X, donde $\theta \in \Theta$, siendo Θ un intervalo abierto de $I\!R$. Bajo ciertas condiciones de regularidad, cualquier solución $\hat{\theta}_n$ de la ecuación de verosimilitud que sea consistente para θ verifica que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, I(\theta)^{-1}). \tag{1}$$

Nota 4 La relación (1) se puede escribir como

$$\hat{\theta}_n \cong N(\theta, [nI(\theta)]^{-1}), \text{ para } n \text{ grande;}$$

y también como

$$\hat{\theta}_n \cong N(\theta, \mathcal{I}_n^{-1}(\theta)), \text{ para } n \text{ grande.}$$

Ejemplo 10 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. $X \sim \gamma(k, 1/\theta)$, de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\theta x}, \quad x > 0,\ k > 0,\ \theta > 0,$$

donde k es conocido y θ es desconocido. Calcúlese el EMV de θ y obténgase su distribución asintótica.