| | | |
|---|---|---|
| Asignatura | : | INFERENCIA ESTADÍSTICA |
| Titulación | : | LICENCIADO EN CCSS. Y T. ESTADÍSTICAS |
| Profesor | : | ISABEL MOLINA PERALTA |
| Capítulo 2 | : | INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA |

## 2.1 DEFINICIONES BÁSICAS:

**Enfoque frecuencial de la probabilidad:** Si se repite un experimento aleatorio infinitas veces, se observa que existe una distribución de probabilidad $F$ que gobierna los resultados del experimento. Habitualmente esta distribución $F$ no se conoce totalmente.

**Inferencia:** Realizar repeticiones (habitualmente independientes) del experimento y medir en cada repetición la variable(s) de interés, con el fin de obtener información sobre la distribución subyacente $F$; en otras palabras, obtener datos que proporcionen información sobre $F$.

TIPOS DE INFERENCIA:

**(1) Inferencia paramétrica:** no se conoce completamente $F$, pero se asume que está contenida en una **familia de distribuciones**

$$\{F(\,\cdot\,;\theta),\ \theta \in \Theta\}.$$

$\theta$ parámetro desconocido, $\Theta$ espacio paramétrico.

Se trata de hacer inferencia (obtener información) sobre $\theta$.

**(1.1) Inferencia clásica:** El parámetro $\theta$ es un valor fijo y solo se usa la información que proporcionan los datos para la inferencia sobre $\theta$.

**(1.2) Inferencia Bayesiana:** El parámetro $\theta$ es una variable aleatoria, con lo que se puede introducir información adicional (a priori o antes de tomar los datos) sobre $\theta$ a través de la distribución de probabilidad a priori de $\theta$.

**(2) Inferencia no paramétrica:** Solo se suponen aspectos muy generales de la distribución $F$ como continuidad, simetría, etc.

**Ejemplo 1** Ejemplos de familias paramétricas:

**(a)** Familia Bern($\theta$), $\theta \in [0,1]$, de funciones de cuantía para la ocurrencia o no de un suceso

$$P(X=1)=\theta, \quad P(X=0)=1-\theta, \quad \theta \in [0,1].$$

**(b)** Familia Pois($\lambda$), $\lambda > 0$ para el número $X$ de sucesos que ocurren en un determinado intervalo de tiempo,

$$p(x;\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x=0,1,2,3,...$$

Probabilidades para $\lambda = 2$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_X(x;2)$ | 0.135 | 0.271 | 0.271 | 0.180 | 0.090 | 0.036 | 0.012 | 0.003 | 0.001 |

**(c)** Familia $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in I\!R$, $\sigma^2 > 0$ para el peso $X$ de niños de cierta edad,

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}.$$

Función de probabilidad para $\mu = 39$ y $\sigma^2 = 25$:

| $I$ | $(-\infty, 35]$ | (35,45] | (45,55] | (55,65] | $(65, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x \in I)$ | 0.003 | 0.209 | 0.673 | 0.114 | 0.001 |

En cada repetición del experimento $i$ observamos el resultado de una variable aleatoria $X_i$ con la misma distribución $F$.

**Muestra aleatoria simple** (m.a.s.) de tamaño $n$ de una v.a. $X \sim F$: Colección de v.a. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con distribución $F$.

Una m.a.s. es un vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de dimensión $n$.

**Función de distribución conjunta de la muestra:**

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n).$$

**Estadístico ($T(X_1, \ldots, X_n)$):** Función de la muestra en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^k$, donde $k$ es la **dimensión** del estadístico.

**Ejemplo 2** Los siguientes son estadísticos:

✓ $T_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$;

✓ $T_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$;

✓ $T_3(X_1, \ldots, X_n) = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} \triangleq X_{(1)}$;

✓ $T_4(X_1, \ldots, X_n) = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\} \triangleq X_{(n)}$;

✓ $T_5(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$;

✓ $T_6(X_1, \ldots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})$.

Un estadístico es una variable aleatoria (o un vector aleatorio si $k > 1$).

Su distribución de probabilidad depende de la distribución de la muestra, y se denomina **distribución en el muestreo**.

**Ejemplo 3** Se lanza una moneda de forma independiente tres veces.

$X_i$: resultado en el $i$-ésimo lanzamiento, $i = 1, 2, 3$;

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el resultado del } i\text{-ésimo lanzamiento es ``cara''}; \\ 0 & \text{si el resultado del } i\text{-ésimo lanzamiento es ``cruz''}. \end{cases}$$

Si no sabemos si la moneda está trucada, entonces

$$p(X_i = 1) = \theta, \quad p(X_i = 0) = 1 - \theta, \quad \theta \in \Theta = [0, 1].$$

Función de cuantía conjunta de la muestra:

$$p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = p(X_1 = x_1)p(X_2 = x_2)p(X_3 = x_3).$$

| $(x_1, x_2, x_3)$ | $p(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|
| (1,1,1) | |
| (1,1,0) | |
| (1,0,1) | |
| (0,1,1) | |
| (1,0,0) | |
| (0,1,0) | |
| (0,0,1) | |
| (0,0,0) | |

A partir de la distribución de la muestra se puede calcular la distribución de los estadísticos

Estadístico: $T_1(X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=1}^{3} X_i$.

Distribución en el muestreo de $T_1$:

| $t_1 = T_1(x_1, x_2, x_3)$ | $p(t_1)$ |
|---|---|
| 3 | |
| 2 | |
| 1 | |
| 0 | |

Estadístico: $T_2(X_1, X_2, X_3) = \bar{X}$

Distribución en el muestreo:

| $t_2 = T_2(x_1, x_2, x_3)$ | $p(t_2)$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2/3 | |
| 1/3 | |
| 0 | |

**Ejemplo 4** Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. $X \sim Exp(1/\theta)$,

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Obténgase la distribución en el muestreo del estadístico

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

**Ejemplo 5** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. con función de distribución $F$. Obtener la distribución en el muestreo del estadístico $T(X_1, \ldots, X_n) = X_{(1)}$ en función de $F$.

## 2.2 DISTRIBUCIONES EN EL MUESTREO BAJO POBLACIONES NORMALES:

Muchas variables de tipo biológico, sociológico y económico tienen distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$.

Teorema Central del Límite: "el efecto acumulado de un gran número de causas independientes con varianza limitada tiene una distribución aproximadamente normal".

Así, para estos casos "conocidos", se suele asumir que la función de distribución pertenece a la familia $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, donde $\mu$ y $\sigma^2$ son desconocidos.

Para realizar inferencias sobre dichos parámetros, se toma una m.a.s. $(X_1, \ldots, X_n)$ de dicha v.a. normal.

**Estimador** de $\theta$ ($\hat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$): Estadístico cuyo valor se "asimile" a $\theta$.

El criterio que se use de "similitud" determina el tipo de estimador.

**Estimación** de $\theta$: Es el valor observado $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$, o realización, de un estimador de $\theta$.

## DISTRIBUCIÓN EN EL MUESTREO DE LA MEDIA MUESTRAL:

**Teorema 1** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s de tamaño $n$ de una v.a. normal de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Entonces, se verifica que

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{1}$$

**Prueba:**

**Ejemplo 6** La cantidad de líquido con que una máquina embotelladora llena las botellas presenta una distribución normal con media $\mu$ y desviación típica de $\sigma = 1$ onzas. De la producción de la máquina de un cierto día, se obtiene una m.a.s. de $n = 9$ botellas llenas, y se mide el contenido de cada una de ellas (en onzas). Determínese la probabilidad de que la media muestral se encuentre como máximo a 0.3 onzas de la media real $\mu$.

**Ejemplo 7** Considérese la situación del Ejemplo 6. ¿Cuántas observaciones deben incluirse en la muestra si se desea que $\bar{X}$ esté como máximo a 0.3 onzas de $\mu$ con una probabilidad de 0.95?

## DISTRIBUCIÓN DE LA VARIANZA MUESTRAL

**Varianza muestral:**

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \bar{X}^2.$$

**Cuasivarianza muestral:**

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}^2.$$

**Descomposición de la variabilidad:**

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$$

Tomando esperanzas:

$$n\sigma^2 = nE(S^2) + n\frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow E(S^2) = \frac{(n-1)}{n}\sigma^2.$$

**Distribución ji-cuadrado:**

Si $Z_1, \ldots, Z_n$ son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, la variable aleatoria $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ es una variable aleatoria ji-cuadrado con $n \in \mathbb{N}$ grados de libertad ($\mathcal{X}_n^2$).

Una variable aleatoria ji-cuadrado con $n$ grados de libertad coincide con una gamma con parámetros $\alpha = n/2$ y $\beta = 2$, es decir,

$$\mathcal{X}_n^2 \equiv \gamma(n/2, 2).$$

La función de densidad de una $\mathcal{X}_n^2$ viene dada por

$$f_{\mathcal{X}_n^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \ x > 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Media y varianza:

$$E(\mathcal{X}_n^2) = n, \quad V(\mathcal{X}_n^2) = 2n.$$

Una v.a. ji-cuadrado es siempre positiva, y su media y varianza aumentan con los grados de libertad $n$. Además, para $n \geq 2$, tiene su máximo en $n-2$. Si $n=1$ ó $n=2$, es monótona decreciente.

**Proposición 1 (Aditividad de la ji-cuadrado)**
Si $X_1 \sim \mathcal{X}_n^2$ y $X_2 \sim \mathcal{X}_m^2$ son independientes, entonces

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{X}_{n+m}^2.$$

**Prueba:** Véase Problema 4 (b) de la Actividad 3.

**Ejemplo 8** Si $(Z_1, \ldots, Z_6)$ es una m.a.s. de una distribución normal estándar, encuéntrese un número $b$ tal que

$$P\left(\sum_{i=1}^{6} Z_i^2 \leq b\right) = 0{,}95.$$

Sabemos que $\sum_{i=1}^6 Z_i^2 \sim \mathcal{X}_6^2$. Así, mirando en la tabla de la ji-cuadrado, obtenemos $b = 12{,}5916$.

**Teorema 2 (Teorema de Fisher)**
Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces:

**(a)** La media muestral $\bar{X}$ y la varianza muestral $S^2$ son independientes;

**(b)** La distribución de $S^2$ (o de $S'^2$) viene dada por

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

**Prueba: (a)** Por el Problema 6 (c) de la Actividad 2, las desviaciones a la media muestral $X_i - \bar{X}$, $i = 1, \ldots, n$ son independientes de la media muestral $\bar{X}$. Por tanto, la media de las desviaciones cuadradas $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ también es independiente de $\bar{X}$.

**(b)** Recordemos la descomposición de la variabilidad efectuada en la página 19,

$$(n-1)S'^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2.$$

Dividiendo entre $\sigma^2$, obtenemos

$$\frac{(n-1)\sigma^2}{S'^2} + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 .$$

Por un lado, sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \mathcal{X}_n^2.$$

Por otro, como $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, entonces

$$\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \mathcal{X}_1^2.$$

Es decir, tenemos que la variable aleatoria $Y = (n-1)S^2/\sigma^2$ más una $\mathcal{X}_1^2$ es igual a una variable $\mathcal{X}_n^2$. Por tanto, la función generatriz de momentos de $Y + \mathcal{X}_1^2$ es igual a la de una $\mathcal{X}_n^2$. Por las propiedades de la f.g.m., sabemos que

$$M_{Y+\mathcal{X}_1^2}(s) = M_Y(s) M_{X_1^2}(s) = M_Y(s)(1-2s)^{-1/2}.$$

Igualando esto a la f.g.m. de la $\mathcal{X}_n^2$, obtenemos

$$M_Y(s)(1-2s)^{-1/2} = (1-2s)^{-n/2}.$$

Despejando $M_Y(s)$, obtenemos

$$M_Y(s) = (1-2s)^{-(n-1)/2},$$

que es la f.g.m. de una $\mathcal{X}_{n-1}^2$. $\square$

**Ejemplo 9** Supongamos que para la máquina embotelladora del Ejemplo 6, se toma una m.a.s. de 10 botellas, y con ellas se calcula la cuasivarianza muestral $S'^2$. Encuéntrese un par de valores $b_1$ y $b_2$, de manera que

$$P(b_1 \leq S'^2 \leq b_2) = 0{,}9.$$

**Distribución $t$ de Student:**

Sean $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $Y \sim \mathcal{X}_\nu^2$ independientes. La distribución de la v.a.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$$

se denomina $t$ **de Student** con $\nu$ grados de libertad.

La densidad de una v.a. $t$ de Student es (véase el Problema 2.2)

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Dicha densidad es simétrica respecto del cero. Además, para $\nu > 1$, su media es $E[T] = 0$, y para $\nu > 2$, su varianza es $V[T] = \nu/(\nu-2) > 1 \Rightarrow$ Es más variable que la normal estándar.

**Teorema 3 (Teorema de Student)**
Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean $\bar{X}$, $S^2$ y $S'^2$ la media, varianza y cuasivarianza muestral. Entonces se verifica

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

y al estadístico $T$ se le denomina **estadístico $T$ de Student**.

**Prueba:**

**Ejemplo 10** La resistencia a la tensión para cierto tipo de alambre se distribuye de forma normal con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$, ambas desconocidas. Se seleccionaron al azar seis segmentos de alambre de un rollo grande, y se midió $X_i$ la resistencia a la tensión del segmento $i$, $i = 1, \ldots, 6$. La media de la población $\mu$ y la varianza $\sigma^2$ se pueden estimar por $\bar{X}$ y $S'^2$. Encuentre la probabilidad aproximada de que $\bar{X}$ esté como máximo a $2S'/\sqrt{n}$ de la verdadera media $\mu$.

**Distribución $F$ de Snedecor:**

Sean las v.a. independientes $X_1 \sim \mathcal{X}^2_{\nu_1}$ y $X_2 \sim \mathcal{X}^2_{\nu_2}$. Se dice que la v.a. definida por

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

tiene una distribución $\mathcal{F}$ **de Snedecor** con $\nu_1$ g.l. del numerador, y $\nu_2$ g.l. del denominador ($\mathcal{F}_{\nu_1,\nu_2}$).

**Nota 1** Se verifican las relaciones

$$\mathcal{F}_{1,\nu} \equiv t^2_{\nu}, \quad \mathcal{F}_{\nu_2,\nu_1} = \mathcal{F}^{-1}_{\nu_1,\nu_2}.$$

**Teorema 4** Sea $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ una m.a.s. de una $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, y sea ${S'}_1^2$ su cuasivarianza muestral. Sea $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ otra m.a.s. de una $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, independiente de la anterior, con cuasivarianza ${S'}_2^2$. Entonces, se verifica

$$F = \frac{{S'}_1^2/\sigma_1^2}{{S'}_2^2/\sigma_2^2} \sim \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1}.$$

**Prueba:**

**Ejemplo 11** Si tomamos dos m.a.s. independientes de tamaños $n_1 = 6$ y $n_2 = 10$ de dos poblaciones normales con la misma varianza poblacional, encuéntrese el número $b$ tal que

$$P\left(\frac{S_1'^2}{S_2'^2} \leq b\right) = 0{,}95.$$

# EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

**Teorema 5 (Teorema Central del Límite)**
Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con media $E[X_i] = \mu$ y varianza $V[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Entonces, la función de distribución de la v.a.

$$U_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

converge a una función de distribución normal estándar cuando $n$ tiende a infinito.

**Prueba:** Reescribimos las variables $U_n$ de la forma

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

donde $Z_i = (X_i - \mu)/\sigma$, $i = 1, \ldots, n$ son independientes e idénticamente distribuidas, con

$$E(Z_i) = 0 \quad \text{y} \quad V(X_i) = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por tanto, la f.g.m. de $U_n$ es

$$\begin{aligned} M_{U_n}(s) &= E\left[\exp\{U_n s\}\right] = E\left[\exp\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Z_i s\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left\{Z_i s/\sqrt{n}\right\}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} M_{Z_i}(s/\sqrt{n}) = \left[M_Z(s/\sqrt{n})\right]^n. \end{aligned}$$

donde $Z = (X_1 - \mu)/\sigma$, con media $E(Z) = 0$ y varianza $E(Z^2) = 1$. Realizamos un desarrollo de Taylor de $M_Z(s/\sqrt{n})$ alrededor de 0,

$$M_Z\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = M_Z(0) + M_Z^{(1)}(0)\frac{(s/\sqrt{n})}{1!} + M_Z^{(2)}(0)\frac{(s/\sqrt{n})^2}{2!} + R(s/\sqrt{n}),$$

donde $M_Z^{(k)}(0)$ denota la derivada $k$-ésima de la f.g.m. evaluada en $s/\sqrt{n} = 0$.

El resto verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(s/\sqrt{n})}{(s/\sqrt{n})^2} = 0.$$

Dado que las derivadas evaluadas en cero coinciden con los momentos, se obtiene

$$\begin{aligned} M_Z\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) &= E[e^0] + E[Z]\frac{s}{\sqrt{n}} + E[Z^2]\frac{s^2}{2n} + R\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 + \frac{s^2}{2n} + R\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{1}{n}\left[\frac{s^2}{2} + nR\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\lim_{n\to\infty} M_{U_n}(s) = \lim_{n\to\infty} \left[M_Z\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left\{1 + \frac{1}{n}\left[\frac{s^2}{2} + nR\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\}^n .$$

Pero se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} nR\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} s^2 \frac{R(s/\sqrt{n})}{(s/\sqrt{n})^2} = 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{s^2}{2} + nR\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right] = \frac{s^2}{2},$$

con lo cual,

$$\lim_{n\to\infty} M_{U_n}(s) = e^{s^2/2} = M_{\mathcal{N}(0,1)}(s).$$

Finalmente, el Teorema de Convergencia de la función generatriz de momentos nos garantiza que la función de distribución de $U_n$ converge a la de una $\mathcal{N}(0,1)$. $\square$

La aproximación dada por el Teorema Central del Límite es válida generalmente para tamaños muestrales a partir de $n = 30$.

**Ejemplo 12** Los resultados de los exámenes finales de los alumnos del curso de preparación para la entrada en la universidad de una población determinada tienen una media de 60 y una varianza de 64 (sobre 100). Una generación específica de $n = 100$ alumnos tuvo una media de 58. ¿Puede afirmarse que estos alumnos tengan un nivel inferior? Para contestar, calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea como máximo 58, cuando $n = 100$.

**Ejemplo 13** Los tiempos de espera para los clientes que pasan por la caja registradora de un supermercado son variables aleatorias independientes con una media de 1.5 minutos y una varianza de 1. Aproxímese la probabilidad de que se pueda atender a 100 clientes en menos de 2 horas.

**Convergencia en distribución:**

Se dice que una sucesión $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias **converge en distribución** a una variable aleatoria $X$ si

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para todos los puntos $x$ donde $F_X(x)$ es continua, y se denota por

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

En esta notación, la tesis del Teorema Central del Límite es

$$U_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

**Esquema:** Distribución de la media muestral:

$$(X_1, \ldots, X_n) \text{ m.a.s.} \begin{cases} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) & \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n) \\ \nsim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) & \begin{cases} n < 30 & \Rightarrow ? \\ n \geq 30 & \Rightarrow \bar{X} \cong \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n) \end{cases} \end{cases}$$

## Aproximación Normal de la Distribución Binomial:

Sea $Y$ una v.a. con distribución $Bin(n, \pi)$. Esta v.a. cuenta el número de éxitos en $n$ repeticiones de un experimento, con probabilidad de éxito igual a $\pi$. Se verifica

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{donde} \quad X_i \text{ i.i.d. Bern}(\pi).$$

Sabemos que

$$E[X_i] = \pi, \quad V[X_i] = \pi(1 - \pi).$$

$Y/n$ proporción de éxitos en las $n$ repeticiones del experimento.

Aplicando el Teorema Central del Límite,

$$\frac{Y}{n} = \bar{X} \cong \mathcal{N}(\ldots, \ldots \quad) \Leftrightarrow Y = n\bar{X} \cong \mathcal{N}(\ldots, \ldots \quad).$$

**Ejemplo 14** El candidato A considera que puede ganar una elección en una ciudad si obtiene al menos 55 % de los votos en el distrito I. Además, supone que alrededor del 50 % de los votantes en la ciudad están a su favor. Si $n = 100$ votantes vienen a votar en el distrito I, considerando a éstos como una m.a.s. de votantes de la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el candidato A reciba al menos 55 % de los votos?

La aproximación Normal de la distribución Binomial funciona bien incluso cuando $n$ no es nuy grande, mientras $p$ no esté muy cerca de cero o de uno.

**Ajuste de los límites de las probabilidades binomiales:**

$Y$ v.a. Binomial
$\mathcal{Y}$ v.a. Normal que aproxima a $Y$

Se obtienen mejores aproximaciones de las probabilidades ajustando los límites de la forma

$$\begin{aligned} P(Y \le a) &\cong P(\mathcal{Y} \le a + 0{,}5), \\ P(Y \ge b) &\cong P(\mathcal{Y} \ge b - 0{,}5), \\ P(Y = c) &\cong P(c - 0{,}5 \le \mathcal{Y} \le c + 0{,}5), \end{aligned}$$

donde $a, b, c \in \boldsymbol{Z}^{+}$.

**Ejemplo 15** Sea $Y \sim Bin(n = 25, \pi = 0{,}4)$. Utilizando la distribución normal, calcúlese $P(Y \leq 8)$ y $P(Y = 8)$.