ACTIVIDAD 6: PROBLEMAS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema 1 Se selecciona una muestra aleatoria de n observaciones $(X_1, \dots, X_n)$ de una población $\gamma(\alpha, \beta)$. Encuentre los estimadores para los parámetros desconocidos α y β por el método de los momentos.

Problema 2 Supóngase que $(X_1, \dots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple de una distribución de Poisson con media λ.

(a) Obtener el estimador de λ utilizando el método de los momentos. Calcular su esperanza y su varianza. ¿Es consistente?

(b) Obtener el estimador de λ utilizando el método de máxima verosimilitud.

Problema 3 Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una distribución normal con media conocida $\mu = 0$ y varianza desconocida σ^2. Encuentre el estimador de σ^2 mediante el método de los momentos.

Problema 4 Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una m.a.s de una v.a. con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{\Gamma(2\theta)}{[\Gamma(\theta)]^2} x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Obtener el estimador de θ mediante el estimador de los momentos.

Problema 5 Un experimento binomial consiste en la realización de n pruebas de manera independiente, donde los resultados de las pruebas son $x_1, \dots, x_n$, siendo $x_i = 1$ si en la i-ésima prueba se obtiene un éxito, ó $x_i = 0$ si en dicha prueba se obtiene un fracaso. Estímese la probabilidad de éxito p por el método de máxima verosimilitud.

Problema 6 Sea $(X_1, \dots, X_m)$ una m.a.s. de la producción por acre de una variedad de trigo A, que tiene distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$, y sea $Y_1, \dots, Y_n$ otra m.a.s. de la producción por acre de otra variedad de trigo B, que tiene distribución $N(\mu_2, \sigma^2)$. Si ambas muestras son independientes, y las medias μ_1 y μ_2 son desconocidas, obténgase el estimador de máxima verosimilitud de σ^2.

Problema 7 Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de tamaño n de una v.a. X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \exp\left(-(x-\theta)\right), \quad x \ge \theta,$$

donde $\theta \ge 0$ es un parámetro desconocido. Se pide

a) Comprobar que $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ es un estadístico suficiente para θ.

b) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ de θ. Sin hacer cálculos, ¿crees que $\hat{\theta}$ es insesgado para θ?

c) ¿Es consistente?

Nota: $X_1, \ldots, X_n$ independientes con función de distribución $F \Rightarrow P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = 1 - [1 - F(x)]^n$.

Problema 8 Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, \qquad 0 \leq x \leq \theta\,,\, \theta > 0\ .$$

a) Obtener la esperanza de X y el estimador por el método de los momentos $\hat{\theta}$ de θ.

b) Obtener la distribución asintótica (para n grande) de $\hat{\theta}$.

Nota: En esta situación, $E(X^2) = \theta^2/6$.

Problema 9 Sean $X_i \sim N(i\theta, 1)$, $i = 1, \ldots, n$, variables aleatorias independientes; es decir, $X_1 \sim N(\theta, 1)$, $X_2 \sim N(2\theta, 1), \ldots, X_n \sim N(n\theta, 1)$.

a) ¿Es $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n iX_i / \sum_{i=1}^n i^2$ un estadístico suficiente para θ?

b) Comprobar que $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosimil de θ.

c) Obtener la distribución de $\hat{\theta}$. ¿Es $\hat{\theta}$ insesgado para θ?