ACTIVIDAD 5: PROBLEMAS ESTIMACIÓN PUNTUAL
INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema 1 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. $Pois(\lambda)$. Demostrar que el estadístico $T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para λ usando la definición de estadístico suficiente.

Problema 2 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. $Rayleigh(\theta)$, cuya función de densidad es

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\Gamma(3/2)\theta^{3/2}}\, x^{1/2} e^{-x/\theta}, \quad x > 0.$$

Demostrar que $T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ es suficiente para θ.

Problema 3 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una $U(0, \theta)$. Demuestre que el estadístico $X_{(n)} = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente para θ.

Problema 4 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una $Exp(\theta)$:

(a) Sugiera un estimador insesgado de θ y calcule su varianza.

(b) Calcule la cantidad de información de Fisher de $(X_1, \ldots, X_n)$ sobre θ. ¿Es el estimador sugerido en (a) eficiente? ¿Es ECUMV?

Problema 5 Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de tamaño n de una v.a. X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \exp\left(-(x-\theta)\right), \quad x \geq \theta,$$

donde $\theta \geq 0$ es un parámetro desconocido. Se pide

(a) Comprobar que $X_{(1)} = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$ es un estadístico suficiente para θ.

(b) ¿Crees que $\hat{\theta} = X_{(1)}$ es insesgado para θ? ¿Es consistente?

Nota: $X_1, \ldots, X_n$ independientes con función de distribución $F \Rightarrow P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = 1 - [1 - F(x)]^n$.

Problema 6 Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, \qquad 0 \leq x \leq \theta\,,\ \theta > 0\ .$$

(a) Obtener la esperanza de X y proponer un estimador $\hat{\theta}$ de θ.

(b) Obtener la distribución asintótica (para n grande) de $\hat{\theta}$.

Nota: En esta situación, $E(X^2) = \theta^2/6$.

Problema 7 Sean $X_i \sim N(i\theta, 1)$, $i = 1, \ldots, n$, variables aleatorias independientes; es decir, $X_1 \sim N(\theta, 1)$, $X_2 \sim N(2\theta, 1), \ldots, X_n \sim N(n\theta, 1)$.

(a) ¿Es $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} iX_i / \sum_{i=1}^{n} i^2$ un estimador insesgado de θ? Obtener su distribución de probabilidad.

(b) ¿Es $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} iX_i / \sum_{i=1}^{n} i^2$ un estadístico suficiente para θ?