ACTIVIDAD 4: PROBLEMAS ESTIMACIÓN PUNTUAL
INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema 1 Cierto tipo de bombillas tiene un tiempo de vida mínimo de $\theta > 0$ días, y el tiempo de vida extra tiene distribución exponencial de parámetro 1. Así, la distribución del tiempo de vida de las bombillas viene dada por la densidad

$$f(x;\theta) = e^{\theta - x}, \quad x > \theta.$$

Se toma una m.a.s. $(X_1, \ldots, X_n)$ de tiempos de vida de n bombillas. Obtén un estimador insesgado del tiempo mínimo de vida θ.

Problema 2 Sea $X \sim U(0,\theta)$, donde θ es desconocido. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de X. El el Ejemplo 3 se vió que $\hat{\theta} = X_{(n)}$ no es un estimador insesgado de θ, pero el estimador $\hat{\theta}' = (n+1)X_{(n)}/n$ sí lo es. Así, parece razonable considerar estimadores de la forma $\hat{\theta}_k = kX_{(n)}$, donde $k > 0$. ¿Qué valor de k proporciona el estimador $\hat{\theta}_k$ con menor ECM? ¿Es ese estimador insesgado?

Problema 3 Se desea estimar la proporción θ de piezas defectuosas que produce una máquina. Para ello, se toma una muestra de n piezas, y se comprueba si son o no defectuosas, obteniéndose la muestra $(X_1, \ldots, X_n)$, donde X_i vale 1 si la pieza i-ésima es defectuosa, y 0 en otro caso, $i = 1, \ldots, n$. Un estimador simple de θ es $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$, pero también se pueden considerar múltiplos de éste; es decir, $\hat{\theta}_k = k\bar{X}$, $k > 0$. Compara éstos estimadores en función de k. Calcula el valor de k tal que $\hat{\theta}_k$ tenga el menor ECM posible.

Problema 4 En la situación del Problema 1, comprueba si $X_{(1)}$ es un estimador consistente del tiempo mínimo θ de vida de las bombillas.

Problema 5 Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una v.a. con distribución $Pois(\lambda)$. Compruébese que

$$\frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\bar{X}/n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Problema 6 Sea $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ una m.a.s. de una población $N(\mu_1, \sigma^2)$ y sea $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ otra m.a.s., independiente de la anterior, de una $N(\mu_2, \sigma^2)$. Se quiere estimar σ^2 y para ello se utiliza una combinación lineal de las cuasi-varianzas muestrales $S_1'^2$ y $S_2'^2$, es decir,

$$\lambda S_1'^2 + (1-\lambda) S_2'^2 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

(a) Demostrar que ese estimador es centrado para cualquier valor de λ.

(b) Obtener el valor de λ que proporciona el estimador más eficiente.

Problema 7 Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_{n_1})$ una m.a.s. de X con $E[X] = \mu_1$, $V[X] = \sigma^2 < \infty$ y $E[X^4] < \infty$, y sea $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2})$ otra m.a.s. de Y con $E[Y] = \mu_2$, $V[Y] = \sigma^2$ y $E[Y^4] < \infty$, siendo X e Y independientes.

(a) Demostrar que $S^2 = \lambda S_1'^2 + (1-\lambda) S_2'^2$ es un estimador consistente de σ^2, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$.

(b) Demostrar que

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Problema 8 El número de fallos por semana de cierto tipo de computadora es una variable aleatoria X con una distribución de Poissón de media λ. Se observa la computadora durante n semanas, y se denotan por $X_1, \ldots, X_n$ a los números de fallos en cada semana respectivamente.

(a) Sugiera un estimador insesgado para λ.

(b) El coste semanal de reparar estos fallos es $C = 3X + X^2$. Calcule el coste semanal esperado.

(c) Encuentre un estimador insesgado del coste semanal esperado.

(d) ¿Es el estimador obtenido en (c) consistente?

Problema 9 Si Y tiene una distribución binomial de parámetros n y p, entonces Y/n es un estimador insesgado de p. Para estimar la varianza de Y, utilizamos en general $n(Y/n)(1 - Y/n)$.

(a) Demuestre que el estimador sugerido es un estimador sesgado de $V(Y)$.

(b) Modifique levemente el estimador para obtener un estimador insesgado de $V(Y)$.

Problema 10 Un fabricante de neumáticos sabe que el recorrido medio de éstos antes de que se estropeen tiene una media de $15,000$ kms. y una desviación típica de 2,500 kms. Calcula un intervalo para el recorrido que excluya como máximo el $10\,\%$ de los recorridos de los neumáticos que vende.

Problema 11 Una máquina que se utiliza para llenar cajas de cereales llena en promedio μ gramos por caja. El fabricante desea que la cantidad real de cereales en cada caja X quede como máximo a 1 gramo de μ al menos en el $75\,\%$ de los llenados. Para que se cumplan los objetivos del fabricante, ¿cuál es el mayor valor que la desviación típica σ de X puede tomar?