ACTIVIDAD 2: PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Problema 1 Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de cuantía:

X=x	P(X=x)
1	1/2
2	1/3
3	1/6

Calcula la función de distribución de X.

Problema 2 Calcula las esperanzas de las siguientes variables aleatorias discretas:

(a) Bern(p);

(b) Bin(n, p);

(c) Geom(p);

(d) Pois(λ).

Problema 3 Calcula las esperanzas de las siguientes variables aleatorias continuas:

(a) Unif(θ_1, θ_2);

(b) Exp(β);

(c) N(μ, σ^2).

Problema 4 Calcula el momento de orden 3 de una variable aleatoria Unif$(0, 1)$.

Problema 5 Demuestra que la varianza de una variable aleatoria N(μ, σ^2) es igual a σ^2.

Problema 6 Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y con idéntica distribución de probabilidad, con esperanza igual a μ y varianza igual a σ^2. Calcula:

(a) $E(\bar{X})$;

(b) $V(\bar{X})$;

(c) $Cov(\bar{X}, X_i - \bar{X})$.

Problema 7 Calcula la función generatriz de momentos de las siguientes variables aleatorias:

(a) Bin(n, p);

(b) Pois(λ);

(c) Exp(β);

(d) Unif(θ_1, θ_2).

Problema 8 Calcular la distribución de $X+Y$, si X e Y son dos variables aleatorias independientes con distribuciones:

(a) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ e $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$;

(b) $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$ e $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2)$;

(c) $X \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$.

Problema 9 Sea X una v.a. con distribución de Poisson de media λ. Calcular la media y la varianza de la nueva v.a. definida a partir de X,

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X = 0; \\ 0 & \text{si } X \neq 0. \end{cases}$$

Problema 10 Demostrar la propiedad aditiva de la distribución gamma. Es decir, demostrar que si X_i, $i=1,\ldots,n$ son variables aleatorias independientes con distribuciones respectivas $\gamma(\alpha_i,\beta)$, $i=1,\ldots,n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\beta\right).$$

Problema 11 Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{X}_\nu^2$; es decir, con función de densidad

$$f(x;\nu) = \frac{x^{\nu/2-1}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}, \quad x>0, \quad \nu>0.$$

(a) Calcular la función generatriz de momentos.

(b) Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias i.i.d. según una $\mathcal{X}_\nu^2$. Calcular la distribución de la variable suma $Y=\sum_{i=1}^n X_i$.

Problema 12 Sea el vector aleatorio (X,Y) con función de densidad

$$f(x,y) = e^{-x}, \quad x>0,\ 0<y<x.$$

Calcular $E[X]$, $E[Y]$ y $Cov(X,Y)$.

Problema 13 Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución Exponencial de medias β_1 y β_2 respectivamente. Calcular la probabilidad de que X_1 exceda X_2.