Introducción a la Probabilidad

Tema 3

Descripción breve del tema

1. Introducción
2. Fenómenos y experimentos aleatorios
   - Sucesos, operaciones con sucesos (conjuntos) y sus propiedades
3. Concepto de probabilidad y propiedades
   - Definición de probabilidad
   - Primeras propiedades de la probabilidad y alguna consideración
4. Asignación de probabilidades en la práctica
   - Equiprobabilidad, regla de Laplace, métodos combinatorios
5. Probabilidad condicionada
   - Independencia de sucesos
   - Concepto de probabilidad condicionada
6. Teorema de Bayes
   - Teoremas de la probabilidad compuesta, de la total y de Bayes

Objetivos

- Entender el concepto de experimento aleatorio
- Valorar la probabilidad y sus aplicaciones.
- Calcular probabilidades de sucesos simples.
- Manejar con soltura el concepto de independencia de sucesos.
- Entender el concepto de probabilidad condicionada y aplicar con soltura los teoremas de la probabilidad total y Bayes.

Descripción breve del tema

1. Introducción
2. Fenómenos y experimentos aleatorios
   - Sucesos, operaciones con sucesos (conjuntos) y sus propiedades
3. Concepto de probabilidad y propiedades
   - Definición de probabilidad
   - Primeras propiedades de la probabilidad y alguna consideración
4. Asignación de probabilidades en la práctica
   - Equiprobabilidad, regla de Laplace, métodos combinatorios
5. Probabilidad condicionada
   - Independencia de sucesos
   - Concepto de probabilidad condicionada
6. Teorema de Bayes
   - Teoremas de la probabilidad compuesta, de la total y de Bayes

Introducción

- El Cálculo de Probabilidades nos permite calcular el grado de fiabilidad o error de las conclusiones obtenidas mediante inferencia estadística.
- La probabilidad mide o cuantifica la incertidumbre que tenemos sobre el resultado de un experimento aleatorio.

Descripción breve del tema

Fenómenos y experimentos aleatorios

- Un experimento es determinista cuando existe un conjunto de circunstancias que, antes de su ejecución, determinan completamente su resultado.
- Un experimento es aleatorio si no podemos predecir su resultado de antemano:
  - Se conocen previamente y con exactitud los posibles resultados del experimento.
  - Es imposible saber su resultado antes de su realización.
  - Se puede repetir indefinidamente, en las mismas condiciones iniciales, obteniendo resultados distintos.

Sucesos

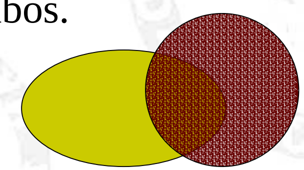
- El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento aleatorio, lo denotamos por E.
  - Ejemplo: Experimento, lanzar dado, $E=\{1,2,3,4,5,6\}$
- Un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral.
  - Un suceso elemental es un elemento del espacio muestral.
    - Ejemplo: (lanzar dado), sale un seis, $A=\{6\}$
  - Un suceso compuesto es un conjunto de sucesos elementales.
    - Ejemplo: (lanzar dado), sale un número par $B=\{2,4,6\}$

Sucesos

- El suceso seguro es el que siempre ocurre al realizar el experimento, E.
  - Ejemplo: (lanzar dado) $E=\{1,2,3,4,5,6\}$
- El suceso imposible es el que nunca ocurre como resultado del experimento $\emptyset$.
  - Ejemplo: (lanzar dado) sale un número negativo

Operaciones con sucesos (conjuntos)

- Operación unión. Dados dos sucesos A y B, el suceso $A\cup B$ ocurre cuando ocurre A u ocurre B u ocurren ambos.

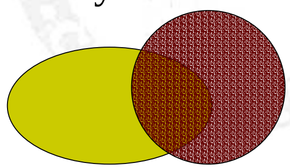


A={☺,☺,☺,☹} ; B={☹,☹,☺,☹}

$A\cup B$={☺,☺,☹,☹,☺,☹}

Operaciones con sucesos (conjuntos)

- Operación intersección. Dados dos sucesos A y B, el suceso $A\cap B$ ó (AB) ocurre cuando ocurren simultáneamente A y B.

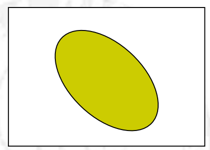


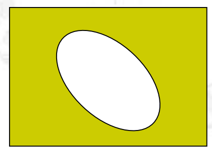
A={☺,☺,☺,☹} ; B={☹,☹,☺,☹}

$A\cap B$={☺,☹}

Operaciones con sucesos (conjuntos)

- Suceso contrario (o complementario). Dado un suceso A, su contrario A^c ocurre cuando A no ocurre.





E={☺,☺,☺} ; A={☺}

A^c={☺,☺}

Operaciones con sucesos (conjuntos)

- Diferencia de sucesos. Dados dos sucesos A y B, la diferencia $A\backslash B$ (ó A-B) es el suceso que ocurre cuando ocurre A y B no ocurre.

  A={☺,☺,☺} ; B={☺,☹}

  $A\backslash B$={☺,☺}.

- Sucesos incompatibles. Dos dos sucesos A y B, son incompatibles (disjuntos) si

$$A\cap B=\emptyset$$

Propiedades de las operaciones con sucesos

- Conmutativa.

$$A\cup B = B\cup A$$

$$A\cap B = B\cap A$$

- Asociativa.

$$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$$

$$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$$

Propiedades de las operaciones con sucesos

- Elemento neutro.
  - Unión, suceso imposible: $A\cup\emptyset = A$
  - Intersección, suceso seguro: $A\cap E = A$
- Distributiva.
  - Unión respecto de la intersección

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

  - Intersección respecto de la unión

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

Propiedades de las operaciones con sucesos

- Complementación.

$$A\cup A^c = E \;\; ; \;\; A\cap A^c = \emptyset$$

- Idempotencia.

$$A\cup A = A \;\; ; \;\; A\cap A = A$$

- Absorción.

$$A\cup E = E \;\; ; \;\; A\cap\emptyset = \emptyset$$

- Simplificación. $A\cup(A\cap B) = A = A\cap (A\cup B)$

Propiedades de las operaciones con sucesos

- Propiedades del contrario.

$$(A^c)^c = A \; ; \; E^c = \emptyset \; ; \; \emptyset^c = E$$

- Leyes de De Morgan.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(\cup_{i=1,\infty} A_i)^c = \cap_{i=1,\infty} (A_i)^c$$

$$(\cap_{i=1,\infty} A_i)^c = \cup_{i=1,\infty} (A_i)^c$$

Descripción breve del tema

Definición de probabilidad

Una probabilidad es una función P que asigna a cada suceso A asociado al experimento un valor real tal que

1. $P(A) \geq 0$;
2. $P(E) = 1$;
3. si $A_1, A_2, \ldots$ son tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces $P(\cup_{i=1,\infty} A_i) = \Sigma_{i=1,\infty} P(A_i)$.

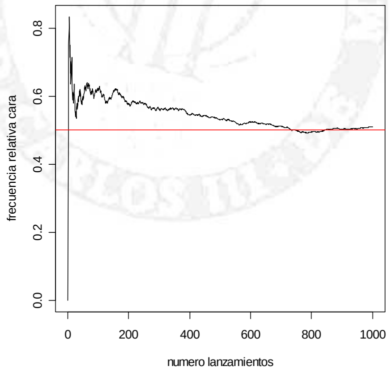
Primeras propiedades de la probabilidad

- Propiedad 1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Propiedad 2. $P(\emptyset) = 0$
- Propiedad 3. si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
- Propiedad 4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Propiedad 5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Consideración final

- Leyes de los Grandes Números.

  Si repetimos muchas veces un experimento, la frecuencia relativa de un suceso *A* cualquiera tiende a estabilizarse en torno a un valor (PROBABILIDAD DEL SUCESO).



Descripción breve del tema

Equiprobabilidad, regla de Laplace

Si un experimento tiene un número finito de resultados posibles y no hay razón que privilegie un resultado frente a otro, para cualquier *A*

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Métodos combinatorios

- **Variaciones de *n* elementos tomados de *k* en *k*.** Número de secuencias ordenadas de k elementos a partir de n elementos sin que se repitan. $n!/(n-k)!$
- **Combinaciones de *n* elementos tomados de *k* en *k*.** Número de conjuntos de k elementos a partir de n elementos sin que se repitan. $n!/(k!(n-k)!)$
- **Variaciones con repetición de *n* elementos tomados de *k* en *k*.** Número de secuencias ordenadas de k elementos a partir de n elementos (pueden repetirse). n^k
- **Combinaciones con repetición de *n* elementos tomados de *k* en *k*.** Número de conjuntos de k elementos a partir de n elementos (pueden repetirse). $(n+k-1)!/(k!(n-1)!)$

Descripción breve del tema

1. Introducción
2. Fenómenos y experimentos aleatorios
   - Sucesos, operaciones con sucesos (conjuntos) y sus propiedades
3. Concepto de probabilidad y propiedades
   - Definición de probabilidad
   - Primeras propiedades de la probabilidad y alguna consideración
4. Asignación de probabilidades en la práctica
   - Equiprobabilidad, regla de Laplace, métodos combinatorios
5. Probabilidad condicionada
   - Independencia entre sucesos
   - Concepto de probabilidad condicionada
6. Teorema de Bayes
   - Teoremas de la probabilidad compuesta, de la total y de Bayes

Independencia entre sucesos

Dos sucesos A y B son independientes si

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$P(A\cap B)$	$P(A\cap B^c)$
$P(A^c\cap B)$	$P(A^c\cap B^c)$

La probabilidad condicionada

Dados dos sucesos A y B con $P(B)>0$, definimos la probabilidad de A condicionada a B como la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B,

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Si A y B son independientes, $P(A|B)=P(A)$.

La probabilidad condicionada

Tenemos:

- $P(A|B)\geq 0$;
- $P(E|B) = 1$;
- si $A_1, A_2,\ldots$ son tales que $A_i\cap A_j=\emptyset$ si $i\neq j$, entonces $P(\cup_{i=1,\infty} A_i|B)=\Sigma_{i=1,\infty}\, P(A_i|B)$.

En consecuencia, todas las propiedades de una probabilidad.

Descripción breve del tema

1. Introducción
2. Fenómenos y experimentos aleatorios
   - Sucesos, operaciones con sucesos (conjuntos) y sus propiedades
3. Concepto de probabilidad y propiedades
   - Definición de probabilidad
   - Primeras propiedades de la probabilidad y alguna consideración
4. Asignación de probabilidades en la práctica
   - Equiprobabilidad, regla de Laplace, métodos combinatorios
5. Probabilidad condicionada
   - Independencia de sucesos
   - Concepto de probabilidad condicionada
6. Teorema de Bayes
   - Teoremas de la probabilidad compuesta, de la total y de Bayes

Teorema de la probabilidad compuesta

Dados n sucesos $A_1, A_2,\dots,A_n$ con $P(A_i)>0$ para $i=1,\dots,n$. Se cumple

$$P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})$$

Si los sucesos son independientes

$$P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$$

Teorema de la probabilidad total

Dados $A_1, A_2,\dots,A_n$ tales que $A_i\cap A_j=\emptyset$ si $i\neq j$ y $\cup_{i=1,n}A_i=E$, entonces la probabilidad de un suceso B cualquiera viene dada por

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

Teorema de Bayes

Dados $A_1, A_2,\dots,A_n$ tales que $A_i\cap A_j=\emptyset$ si $i\neq j$ y $\cup_{i=1,n}A_i=E$ y dado un suceso B cualquiera con $P(B)>0$, entonces se cumple

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}$$