VARIABLES ALEATORIAS

CONCEPTOS BÁSICOS DE V.A.
V.A. DISCRETAS
V.A. CONTINUAS
MEDIDAS CARACTERÍSTICAS
TRANSFORMACIÓN DE V.A.

Emilio Letón
Dpto. Estadística, UC3M

¿Dónde estamos?

DESCR. | CÁLC. P. | INFERENCIA

1981

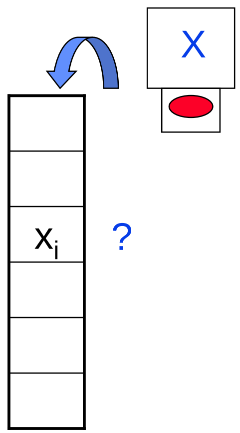
Probabilidad 1988

Variables aleatorias 1994

YT: WWWLIAA

I feel it in my fingers
I feel it in my toes
Love is all around me
And so the feeling grows
Its written on the wind
Its everywhere I go, oh yes it is
So if you really love me
Come on and let it show

Frentes abiertos



¿De dónde vienen los datos?

¿P( )?

CONCEPTOS BÁSICOS DE V.A.

Definición de variables aleatorias

Soporte y tipos

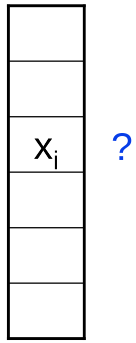
V.A. DISCRETAS

V.A. CONTINUAS

MEDIDAS CARACTERÍSTICAS

TRANSFORMACIÓN DE V.A.

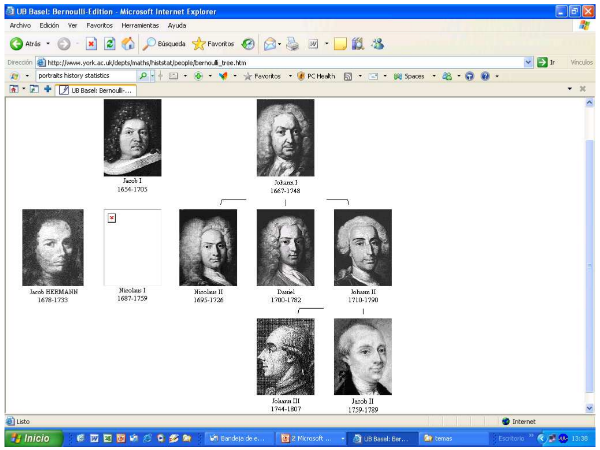
CONCEPTOS BÁSICOS DE V.A.



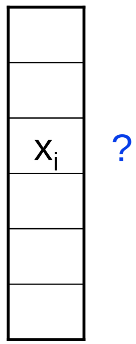
Alea; Stokastikos

(Jakob Bernoulli; XVII)

Los Bernoulli



Definición de v.a.



Experimento aleatorio

Espacio muestral=E

$$E \xrightarrow{X} \Re$$

$$e \longrightarrow X(e)$$

Resumen: definición de v.a.

Soporte y tipos

Soporte: conjunto de posibles valores que puede tomar la v.a.

Tipos: v.a. discretas finitas; v.a. discretas infinitas; v.a. continuas

E_1, E_2, E_3, E_4

¿Estamos rodeados de v.a?

Ejemplo asociado a E_1 (1/2)

F
F
S
F
S
S

Se observa una pieza si F o S

F=fallo, defectuoso; S=correcto

Si el dígito se ha transmitido F o S

E_1={F,S}

Discreto finito de 2 elementos

Ejemplo asociado a E_1 (2/2)

$$E \xrightarrow{X} \Re$$

$$\{F\} \longrightarrow 0$$

$$\{S\} \longrightarrow 1$$

Soporte: {0,1}

Tipo: v.a. dis. finita

Ejemplo asociado a E_2 (1/3)

FFF
SFF
FSF
FSS
FSS
FFF

Se observa una pieza de 3 comp. con cada componente F o S

E_2={FFF,FFS,FSF,FSS,SSS, SSF,SFS,SFF}

Discreto finito de 8 elementos

Ejemplo asociado a E_2 (2/3)

$E \xrightarrow{X} \Re$

$e \longrightarrow$ Núm de S

Soporte: {0,1,2,3}

Tipo: v.a. dis. finita

Ejemplo asociado a E_2 (3/3)

$E \xrightarrow{X^*} \Re$

$e \longrightarrow$ N.de S – N.de F

Soporte: {-3,-1,1,3}

Tipo: v.a. dis. finita

Ejemplo asociado a E_3 (1/2)

S
FS
FFS
S
FS
FS

Se observa nº de veces hasta transmitir un bit correctamente

E_3={S,FS,FFS,FFFS, FFFFS,…}

Discreto inf. (infinito numerable)

Ejemplo asociado a E_3 (2/2)

$$E \xrightarrow{X} \mathfrak{R}$$

$$e \longrightarrow \text{Núm de veces hasta S}$$

Soporte: {1,2,3,…}

Tipo: v.a. dis. infinita

Ejemplo asociado a E_4

15
12
3
45
17
1

Se observa el tiempo hasta transmitir un bit correctamente

Tiempo de acceso a una web

$E_4=R^+$

Continuo inf. (inf. no numerable)

Ejemplo asociado a E_4 (2/2)

$$\mathfrak{R}^+ \xrightarrow{X} \mathfrak{R}$$

$$x \longrightarrow x$$

Soporte: $\mathfrak{R}^+$

Tipo: v.a. continua

Resumen: soporte y tipos

CONCEPTOS BÁSICOS DE V.A.

V.A. DISCRETAS

Función de probabilidad

Función de distribución

V.A. CONTINUAS

MEDIDAS CARACTERÍSTICAS

TRANSFORMACIÓN DE V.A.

V.A. DISCRETAS

Gráfico de frecuencias relativas

Gráfico acumulado de fr. relativas

Función de probabilidad

E: discreto (finito o inf. num.)

Con la probabilidad de los sucesos elementales se calcula todo

Definición

$$p(x) = P(X = x)$$

Propiedades

$$0 \le p(x) \le 1$$

$$\sum_{x} p(x) = 1$$

Ejemplo v.a. discreta finita (1/4)

$$p(x) = \begin{cases} 1/6 & , x = 1 \\ 5/6 & , x = 0 \end{cases}$$

Ejemplo v.a. discreta finita (2/4)

$$p(x) = \begin{cases} p & , x = 1 \\ 1 - p & , x = 0 \end{cases}$$

Ejemplo v.a. discreta finita (3/4)

$$p(x) = \begin{cases} 1/3 & , x = -1 \\ 2/3 & , x = 0 \end{cases}$$

Ejemplo v.a. discreta finita (4/4)

$$p(x) = \frac{1}{k} \qquad x = 1,\ldots,k$$

Ejemplo v.a. discreta infinita

$$X \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ & & \ldots \end{pmatrix}$$

Resumen: función de probabilidad

Función de distribución (disc.)

E: discreto (finito o inf. num.)

Definición

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$$

$$p(x) \leftrightarrow F(x)$$

Propiedades

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

$$F \ c.p.d$$

$$F \ m.n.d$$

Resumen: fc distribución (disc.)

Ej. 1 v.a.d. (1/3)

$$p(x) = \begin{cases} p & , x = 1 \\ 1 - p & , x = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i) = ?$$

Ej. 1 v.a.d. (2/3)

Ej. 1 v.a.d. (3/3)

Resumen: ej. 1 v.a.d.

Ej. 2 v.a.d. (1/3)

$$X \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ & & \ldots \end{pmatrix}$$

Ej. 2 v.a.d. (2/3)

Ej. 2 v.a.d. (3/3)

Resumen: ej. 2 v.a.d.

Prob. de intervalos en v.a.d. (1/4)

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$(X \leq b) = (a < X \leq b) \cup (X \leq a)$$

Prob. de intervalos en v.a.d. (2/4)

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$$

Prob. de intervalos en v.a.d. (3/4)

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$$

Prob. de intervalos en v.a.d. (4/4)

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a)$$

Resumen: prob. de inter. en v.a.d.

Simetría en v.a.c.

$$P(X \le \alpha - x) = P(X \ge \alpha + x)$$

$$P(X \le \alpha - x) = P(\alpha + x \le X \le +\infty)$$

$$F(\alpha - x) =$$

$$1 - F(\alpha + x) + P(X = \alpha + x)$$

CONCEPTOS BÁSICOS DE V.A.

V.A. DISCRETAS

V.A. CONTINUAS

Función de densidad

Función de distribución

MEDIDAS CARACTERÍSTICAS

TRANSFORMACIÓN DE V.A.

V.A. CONTINUAS

Histograma de frecuencias relativas

Histograma acumulado de fr. relativas

Función de densidad

E: continuo (infinito no num.)

Definición

$$0 = P(X = x)$$

$$f(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x}$$

Propiedades

$$0 \leq f(x)$$

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Ejemplo v.a. continua (1/5)

Ejemplo v.a. continua (2/5)

Ejemplo v.a. continua (3/5)

Ejemplo v.a. continua (4/5)

Ejemplo v.a. continua (5/5)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Resumen: función de densidad

Integrales impropias (1/2)

$$\int_{x=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

Integrales impropias (2/2)

Resumen: integrales impropias

Función gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

$$p > 0$$

Propiedades

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) \qquad p > 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(1/2) = \pi^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

Ejercicio 1 (1/2)

$$\int_{x=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

Ejercicio 1 (2/2)

Ejercicio 2 (1/2)

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad dy = x\,dx$$

$$x = (2y)^{1/2}$$

Ejercicio 2 (2/2)

$$\int_{y=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} (2y)^{1/2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - 1\right)$$

Resumen: función gamma

Función beta

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

$$p,q > 0$$

Propiedades

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$B(1/2, 1/2) = \pi$$

$$B(p,1) = 1/p$$

Ejercicio

$$\int_0^1 12x^4(1-x)dx$$

$$=12B(5,2)=12\frac{\Gamma(5)\Gamma(2)}{\Gamma(7)}=12\frac{4!\cdot 1!}{6!}$$

$$=12\frac{1}{6\cdot 5}=\frac{2}{5}$$

Resumen: función beta

Función de distribución (cont.)

E: continuo (infinito no num.)

Definición

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x)\leftrightarrow F(x)$$

Propiedades

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

$$F \ c.p.d$$

$$F \ m.n.d$$

Resumen: fc distribución (cont.)

Ej. 1 v.a.c. (1/5)

Ej. 1 v.a.c. (2/5)

Ej. 1 v.a.c. (3/5)

Ej. 1 v.a.c. (4/5)

Ej. 1 v.a.c. (5/5)

Resumen: ej. 1 v.a.c.

Prob. de intervalos en v.a.c.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Simetría en v.a.c.

$$F(\alpha - x) =$$

$$1 - F(\alpha + x) + P(X = \alpha + x)$$

$$f(\alpha - x)(-1) = -f(\alpha + x)$$

$$f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$$

$$f(-x) = f(x) \quad par$$

CONCEPTOS BÁSICOS DE V.A.

V.A. DISCRETAS

V.A. CONTINUAS

MEDIDAS CARACTERÍSTICAS

Media poblacional

Varianza y dt poblacional

Otras medidas poblacionales

TRANSFORMACIÓN DE V.A.

MEDIDAS CARACTERÍSTICAS

Media poblacional (Esperanza)
Varianza y dt poblacional
Otras medidas poblacionales

Media poblacional

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot fr\left(x_j\right)$$

Discretas

$$\mu = E\left[X\right] = \sum_{x} x \cdot p\left(x\right)$$

$$\sum_{x} \left| x \cdot p\left(x\right) \right| < +\infty$$

Continuas

$$\mu = E\left[X\right] = \int_{x} x \cdot f\left(x\right) dx$$

$$\int_{x} \left| x \cdot f\left(x\right) \right| dx < +\infty$$

Propiedades (1/4)

$$E\left[X\right] \quad con \quad unidades \quad u$$

$$E\left[X\right] \geq 0 \quad ó \quad E\left[X\right] \leq 0$$

$$Si \quad X \geq 0 \Rightarrow E\left[X\right] \geq 0$$

Propiedades (2/4)

$$E[c] = c$$

$$E[a + bX] = a + bE[X]$$

$$E[b_1 X_1 \pm b_2 X_2] =$$

$$b_1 E[X_1] \pm b_2 E[X_2]$$

Propiedades (3/4)

$$E[h(X)] = \sum_x h(x) p_X(x)$$

$$E[h(X)] = \int_x h(x) f_X(x) dx$$

$$E[XY] \overset{ind.}{=} E[X]E[Y]$$

Propiedades (4/4)

Si existe la media

y hay simetría

$\Rightarrow$ *media* $=$ *mediana*

Resumen: media poblacional

Varianza poblacional

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left(x_j - \overline{x}\right)^2 \cdot fr\left(x_j\right)$$

Discretas

$$\sigma^2 = V[X] = \sum_x (x-\mu)^2 \cdot p(x)$$

$$h(x) = (x-\mu)^2$$

Continuas

$$\sigma^2 = V[X] = \int_x (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$h(x) = (x-\mu)^2$$

Propiedades (1/4)

$$V[X] \quad con \quad unidades \quad u^2$$

$$V[X] \quad \geq 0$$

Propiedades (2/4)

$$V[c] = 0$$

$$V[a + bX] = b^2 V[X]$$

$$V[b_1 X_1 \pm b_2 X_2] \overset{ind.}{=}$$

$$b_1^2 V[X_1] + b_2^2 V[X_2]$$

Propiedades (3/4)

$$V[h(X)] = \sum_x (h(x) - E[h(x)])^2 p_X(x)$$

$$V[h(X)] = \int_x (h(x) - E[h(x)])^2 f_X(x) dx$$

Propiedades (4/4)

$$V[X] \leq E\left[(X - c)^2\right]$$

$$para \quad cualquier \quad c \neq \mu$$

Resumen: varianza poblacional

Ej. 1 var

Resumen: ej. 1 var.

Desviación típica poblacional

$$\sigma = D[X] = +\sqrt{V[X]}$$

Discretas

$$\sigma = D[X] = \sqrt{\sum_{x} (x-\mu)^2 \cdot p(x)}$$

Continuas

$$\sigma = D[X] = \sqrt{\int_X (x-\mu)^2 f(x)dx}$$

Propiedades (1/3)

$$D[X] \quad con \quad unidades \quad u$$

$$D[X] \quad \geq 0$$

Propiedades (2/3)

$$D[c] = 0$$

$$D[a + bX] = |b| D[X]$$

$$D[b_1X_1 \pm b_2X_2] \overset{ind.}{=}$$

$$\sqrt{b_1^2V[X_1] + b_2^2V[X_2]}$$

Propiedades (3/3)

$$D[h(X)] = \sqrt{V[h(X)]}$$

Resumen: dt poblacional

Des. de Chebyshev poblacional

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

$$P(-k\sigma \leq X-\mu \leq k\sigma)$$

$$P(\mu-k\sigma \leq X \leq \mu+k\sigma)$$

Resumen: des. Cheb. poblacional

Tipificación

$$Z=\frac{X-E[X]}{D[X]}$$

Media

$$E[Z] = E\left[\frac{X - E[X]}{D[X]}\right]$$

Varianza

$$V[Z] = V\left[\frac{X - E[X]}{D[X]}\right]$$

Resumen: tipificación

Mediana poblacional

x_{med} : 50% *obs. a la izda*

el 50% *a la dcha*

$$P(X \leq x_{med}) \geq \frac{1}{2}$$

$$P(X \geq x_{med}) \geq \frac{1}{2}$$

Discretas

$$\frac{1}{2} \leq F(x_{med}) \leq \frac{1}{2} + P(X = x_{med})$$

Continuas

$$\frac{1}{2} = F(x_{med})$$

Propiedades (1/4)

$$\varsigma_{0.5}[X] \quad \textit{con} \quad \textit{unidades} \quad u$$

$$\varsigma_{0.5}[X] \ \geq 0 \quad \textit{ó} \quad \varsigma_{0.5}[X] \leq 0$$

$$\textit{Si} \quad X \geq 0 \Rightarrow \varsigma_{0.5}[X] \geq 0$$

Propiedades (2/4)

$$\varsigma_{0.5}[c] = c$$

$$\varsigma_{0.5}[a + bX] = a + b\varsigma_{0.5}[X]$$

$$\varsigma_{0.5}[b_1 X_1 \pm b_2 X_2] =$$

$$= b_1 \varsigma_{0.5}[X_1] \pm b_2 \varsigma_{0.5}[X_2]$$

Propiedades (3/4)

No necesariamente única

$$Con\ simetría \quad \Rightarrow cg = mediana$$

Propiedades (4/4)

$$E\left[\left|X - c\right|\right]$$

$$se \quad hace \quad mínima \quad c = \varsigma_{0.5}$$

Resumen: mediana poblacional

CAS poblacional

$$CAS = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = E\left[(X - \mu)^3\right]$$

$$\mu_1 = \qquad \mu_2 =$$

Resumen: CAS poblacional

CAP poblacional

$$CAP = \gamma_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

$$\mu_4 = E\left[(X - \mu)^4\right]$$

$$\mu_1 = \qquad \mu_2 =$$

Resumen: CAP poblacional

Cuantiles poblacionales

$$\varsigma_p : p * 100\% \quad obs. \quad a \quad la \quad izda$$

$$el \quad p * 100\% \quad a \quad la \quad dcha$$

$$P(X \leq \varsigma_p) \geq p$$

$$P(X \geq \varsigma_p) \geq 1 - p$$

Discretas

$$p \leq F(\varsigma_p) \leq p + P(X = \varsigma_p)$$

Continuas

$$p = F(\varsigma_p)$$

Resumen: cuantiles poblacionales

Otras medidas poblacionales

$$\max_x p(x) \qquad \max_x f(x)$$

$$CV = \frac{\sigma}{|\mu|}$$

Resumen: otras medidas pob.

Ej. 1 m.c. (1/5)

Ej. 1 m.c. (2/5)

Ej. 1 m.c. (3/5)

Ej. 1 m.c. (4/5)

Ej. 1 m.c. (5/5)

Resumen: ej. 1 m.c.

Ej. 2 m.c. (1/5)

Ej. 2 m.c. (2/5)

Ej. 2 m.c. (3/5)

Ej. 2 m.c. (4/5)

Ej. 2 m.c. (5/5)

Resumen: ej. 2 m.c.

CONCEPTOS BÁSICOS DE V.A.

V.A. DISCRETAS

V.A. CONTINUAS

MEDIDAS CARACTERÍSTICAS

TRANSFORMACIONES DE V.A.

Teorema de la transformación

Simulación de v.a.

TRANSFORMACIONES DE V.A.

$$X \approx F_X(x)$$

$$Y = h(X) \Rightarrow ¿F_Y(y)?$$

$$sen(X) \qquad X^2$$

$$\sqrt{X} \qquad a + bX$$

Teorema de la transformación

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y)$$

Continua monótona crec.

$$F_Y(y) = P\left(X \le h^{-1}(y)\right)$$

$$= F_X\left(h^{-1}(y)\right) = F_X(g(y))$$

$$f_Y(y) = f_X(g(y))\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

Continua monótona decrec.

$$F_Y(y) = P\left(X \ge h^{-1}(y)\right)$$

$$= 1 - P\left(X < h^{-1}(y)\right)$$

$$= 1 - \left[F_X\left(h^{-1}(y)\right) - P\left(h^{-1}(y)\right)\right]$$

$$f_Y(y) = -f_X(g(y))\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

Continua monótona

$$f_Y(y) = f_X(g(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$= \frac{f_X(g(y))}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}$$

Resumen: teorema de la transf.

Ej. 1 transf. v.a (1/6)

¿Si X es U(0,1) entonces 1-X es U(0,1)?

Ej. 1 transf. v.a (2/6)

Ej. 1 transf. v.a (3/6)

Ej. 1 transf. v.a (4/6)

Ej. 1 transf. v.a (5/6)

Ej. 1 transf. v.a (6/6)

Resumen: ej. 1 transf. v.a.

Ej. 2 transf. v.a (1/4)

¿Si X es U(0,1) entonces exp(X) es U(0,e)?

Ej. 2 transf. v.a (2/4)

Ej. 2 transf. v.a (3/4)

Ej. 2 transf. v.a (4/4)

Resumen: ej. 2 transf. v.a.

Ej. 3 transf. v.a (1/5)

Sea la v.a. X N(0,1) dada por

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^{2}\right)\quad x\in\Re$$

*-Determinar la función de densidad de Y=X*X*

Ej. 3 transf. v.a (2/5)

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(X^2\le y\right)$$

$$=P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right)$$

$$=F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

Ej. 3 transf. v.a (3/5)

$$F_Y(y)=F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

$$f_Y(y)=$$

$$f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2}y^{-1/2}-f_X\left(-\sqrt{y}\right)\left(-\frac{1}{2}y^{-1/2}\right)$$

Ej. 3 transf. v.a (4/5)

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\right)y & y>0\\ 0 & resto\end{cases}$$

Ej. 3 transf. v.a (5/5)

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = \sum_i f_X\left(g^i(y)\right)\left|J^i\right|$$

$$= f_X\left(+\sqrt{y}\right)\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

Resumen: ej. 3 transf. v.a.

Simulación de v.a.

Si X v.a. cuya función de distribución $F_X(x)$ admite inversa entonces $U=F_X(X)$ es U(0,1)

Justificación (1/2)

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

$$= P\left(F_X(X) \le y\right)$$

$$= P\left(X \le F_X^{-1}(y)\right)$$

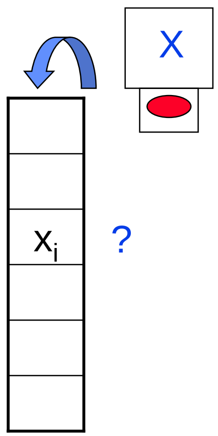
$$= F_X\left(F_X^{-1}(y)\right) = y$$

Justificación (2/2)

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0\le y<1\\ 1 & 1\le y\end{cases}$$

Interpretación geométrica

Mecanismo interno de una v.a.



$$\left(p(x),F(x)\right)$$

$$\left(f(x),F(x)\right)$$

Catálogo: Modelos de probabilidad

Resumen: simulación de v.a.

Webgrafía: web de la asignatura

Software; Prácticas; ABP; Autoevaluación;
Ejercicios; Mini-Vídeos; CPC; Tutorías; Webgrafía