



PROBABILIDAD

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROB.
PROBABILIDAD CONDICIONADA

Emilio Letón
Dpto. Estadística, UC3M

Estadística: E. Letón

¿Dónde estamos?

DESCR.

CÁLC. P.

INFERENCIA

1981

Probabilidad

1988

Estadística: E. Letón

YT: EOF

Let me sail, let me sail, let the
orinoco flow,
Let me reach, let me beach on the
shores of tripoli.

Carry me on the waves to the lands
I've never been,

We can sail, we can sail...

Estadística: E. Letón

Frentes abiertos

Llegar a las poblaciones

Estadística: E. Letón

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROB.

Experimento y espacio muestral
Sucesos
Probabilidad de un suceso

PROBABILIDAD CONDICIONADA

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROB.

X
X_i

?

Experimento y espacio muestral

Experimento

Obtener un dato bajo condiciones (población):
determ., aleat.

Espacio muestral

$E = \Omega =$
{resultados elementales}

Ejemplo E_1

F
F
S
F
S
S

Se observa una pieza si F o S
F=fallo, defectuoso; S=correcto
Si el dígito se ha transmitido F o S
 $E_1 = \{F, S\}$
Discreto finito de 2 elementos

Ejemplo E₂

FFF
SFF
FSF
FSS
FSS
FFF

Se observa una pieza de 3 comp.
con cada componente F o S

$$E_2 = \{FFF, FFS, FSF, FSS, SSS, \\ SSF, SFS, SFF\}$$

Discreto finito de 8 elementos

Ejemplo E₃

S
FS
FFS
S
FS
FS

Se observa n^o de veces hasta
transmitir un bit correctamente

$$E_3 = \{S, FS, FFS, FFFS, FFFF, \dots\}$$

Discreto inf. (infinito numerable)

Ejemplo E₄

15
12
3
45
17
1

Se observa el tiempo hasta
transmitir un bit correctamente

Tiempo de acceso a una web

$$E_4 = \mathbb{R}^+$$

Continuo inf. (inf. no numerable)

Resumen: exp. y espacio muestral

Sucesos

Cualquier subconjunto “de interés” en E

Letras mayúsculas: A, B, C, D, F, ...

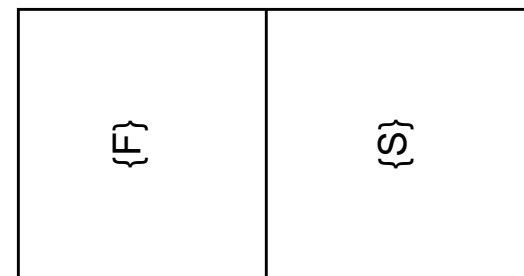
Suceso elemental

Suceso complementario

Suceso vacío \emptyset ; suceso seguro

Operaciones con sucesos \cap (y), \cup (o)

Ejemplo E₁



4

Ejemplo E₂

{F, F, F}
{F, F, S}
{F, S, F}
{F, S, S}
{S, S, S}
{S, S, F}
{S, F, S}
{S, F, F}

256

Al menos dos S

Ejemplo E₃

{S}
{F, S}
{F, F, S}

dinf

Al menos tres F

Ejemplo E₄

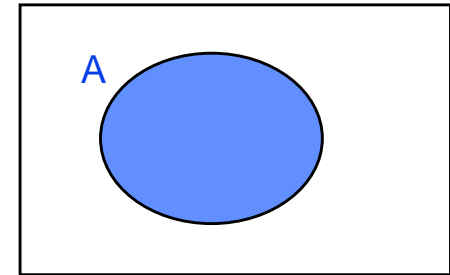


infnn

Euler-Venn (1/2)



Leonhard
Euler
(1707-1763)



Euler-Venn (2/2)

E_1, E_2, E_3 : suceso es todo subcjto de E

E_4 : suceso $(a,b), [a,b), [a,b], (a,b)$

Resumen: sucesos

Operaciones de sucesos

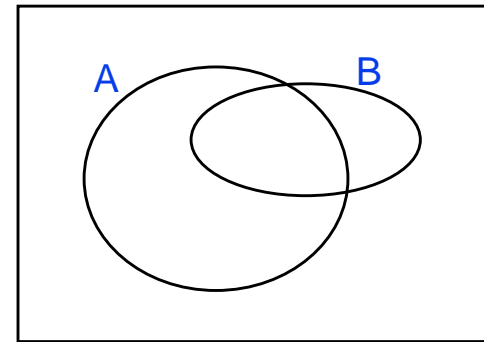
Intersección

Unión

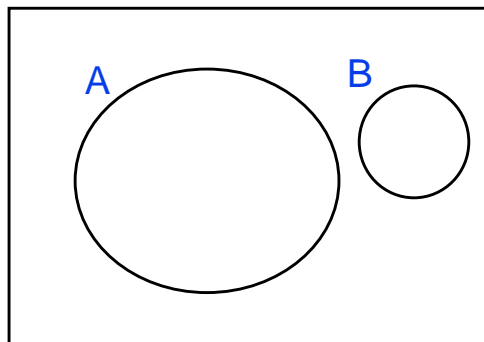
Complementario

Diferencia

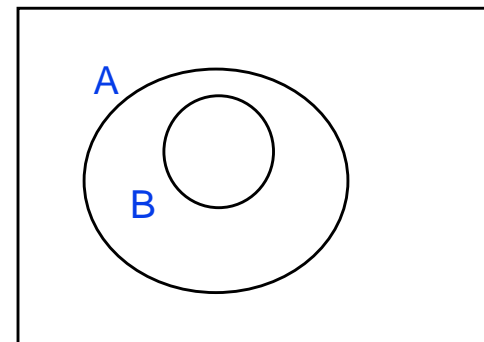
Intersección (1/3)



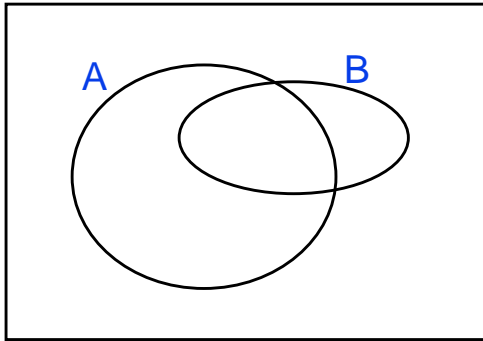
Intersección (2/3)



Intersección (3/3)

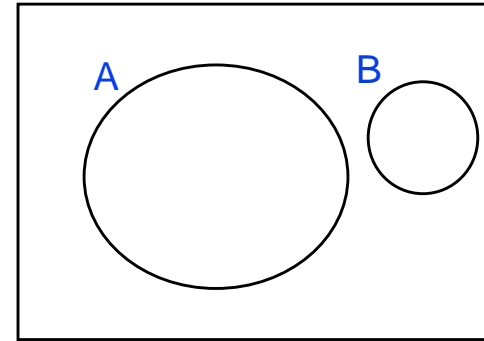


Unión (1/3)



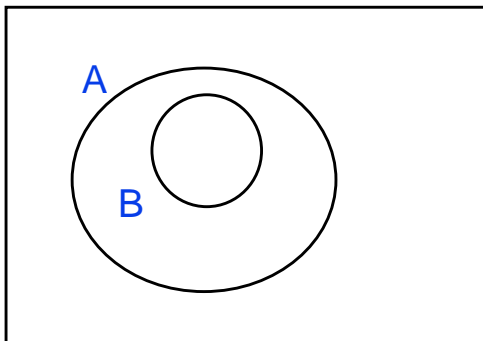
Estadística: E. Letón

Unión (2/3)



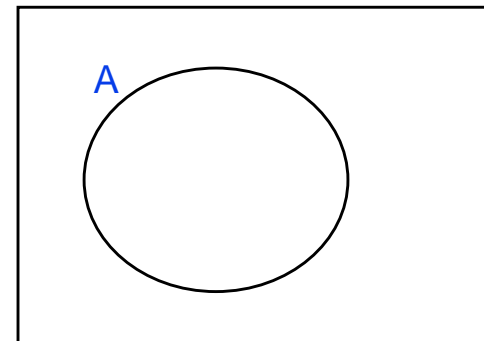
Estadística: E. Letón

Unión (3/3)



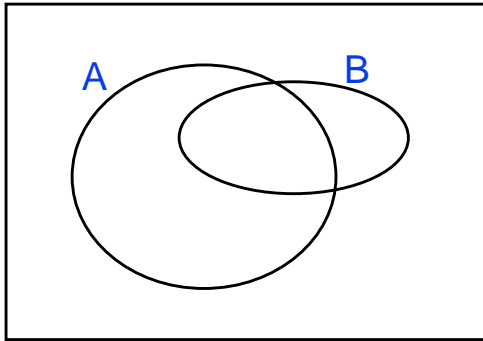
Estadística: E. Letón

Complementario



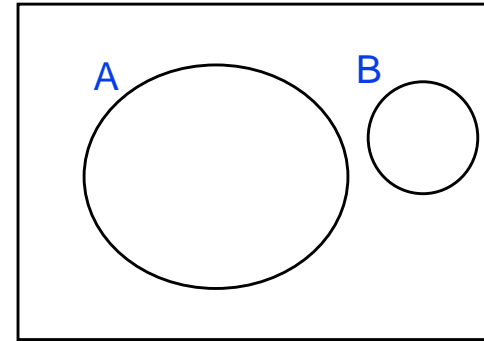
Estadística: E. Letón

Diferencia (1/4)



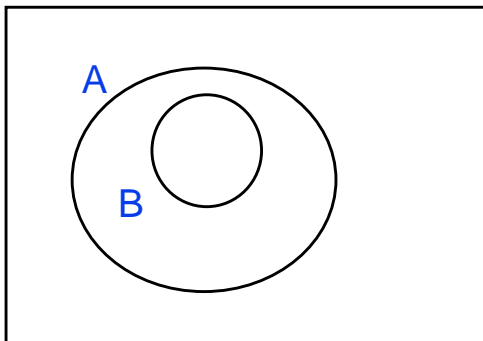
Estadística: E. Letón

Diferencia (2/4)



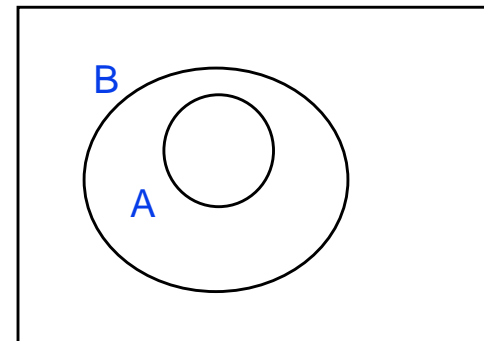
Estadística: E. Letón

Diferencia (3/4)



Estadística: E. Letón

Diferencia (4/4)



Estadística: E. Letón

Resumen: ope. de sucesos

Propiedades ope. de sucesos

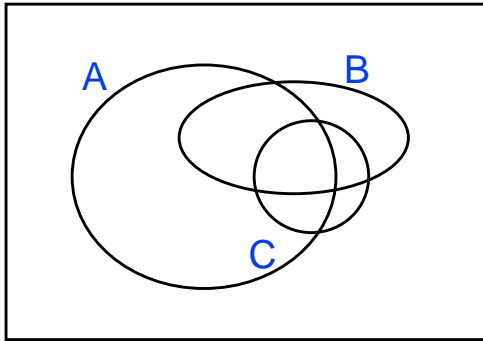
Básicas
Distributiva
Leyes de Morgan

Básicas (1/2)

Básicas (2/2)

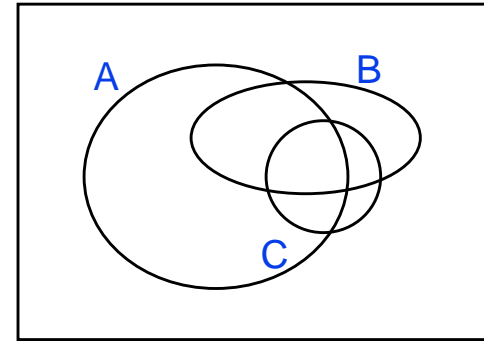
Distributiva (1/3)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Distributiva (2/3)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

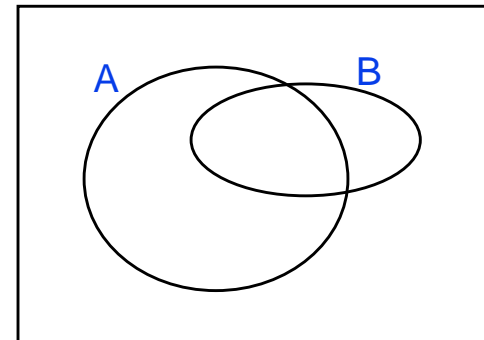


Distributiva (3/3)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

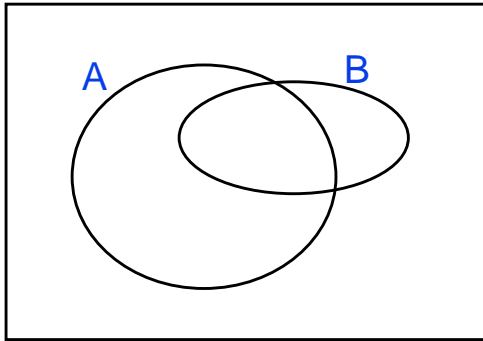
Leyes de Morgan (1/3)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



Leyes de Morgan (2/3)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



Leyes de Morgan (3/3)

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Resumen: prop. ope. de sucesos

Probabilidad de un suceso

$$E_2 = \{FFF, FFS, FSF, FSS, SSS, SSF, SFS, SFF\}$$

FFF	n_1	n_1/n
FFS	n_2	n_2/n
FSF	n_3	n_3/n
FSS	n_4	n_4/n
SSS	n_5	n_5/n
SSF	n_6	n_6/n
SFS	n_7	n_7/n
SFF	n_8	n_8/n

Fermat



Fermat Pascal Probability

Fermat
(1601-1665)

Estadística: E. Letón

Laplace



Laplace
(1749-1827)

Estadística: E. Letón

Kolmogorov



Kolmogorov
(1903-1987)

Estadística: E. Letón

Resumen: prob. de un suceso

Estadística: E. Letón

Prop. probabilidad

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Complementario

$$P(\bar{A}) = ?$$

Vacío

$$P(\emptyset) = ?$$

Diferencia

$$P(A - B) = ?$$

¿Unión / Intersección?

La prob. de lluvia el sábado es del 50%
La prob. de lluvia el domingo es del 50%
Entonces la probabilidad de que llueva el fin de semana es del ...

Unión (1/2)

$$P(A \cup B) = ?$$

Unión (2/2)

$$P(A \cup B \cup C) = ?$$

Intersección

$$P(A \cap B) = ?$$

Sucesos elementales

$$P(A) = ?$$

$$\text{Si } A = \bigcup_i \{a_i\} \Rightarrow P(A) = \sum_i P(\{a_i\})$$

Espacios equiprobables

$$E = \bigcup_{i=1}^n \{e_i\} \Rightarrow P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$$

$$P(A) = \frac{1}{n} \text{card}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$$

Resumen: propiedades

Combinatoria

Regla del producto

Si una elección tiene M alternativas y otra elección N → La realización de ambas admite MN alternativas.

Ejemplo 1

5 camisetas y 4 pantalones

Ejemplo 2

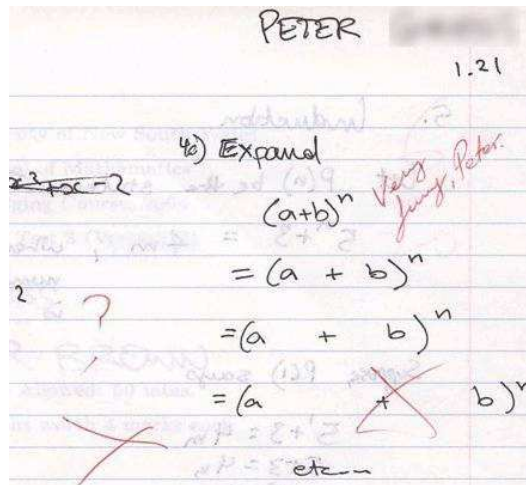
Ordenaciones distintas con $\{1, 2, \dots, n\}$

Ejemplo 3

De un conjunto de n elementos,
subconjuntos de m elementos

Resumen: combinatoria

Binomio de Newton



Estadística: E. Letón

n=3

Estadística: E. Letón

n cualquiera

Estadística: E. Letón

Ejemplo

¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto de n elementos

Estadística: E. Letón

Resumen: binomio de Newton

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROB.

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Independencia
Teorema de la probabilidad total
Teorema de Bayes

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Manejando información extra

Sabiendo que ...

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ si } P(B) > 0$$

Independencia

*A y B son independientes sii
 $P(A|B)=P(A)$ y $P(B|A)=P(B)$*

Caracterización

*A y B son independientes si y solo si
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$*

Intuición

Ejemplo

*La probabilidad de cometer un error en un
"movimiento" es del 0,01.
Si se hacen 100 movimientos, ¿cuál es la
probabilidad de cometer al menos un error?*

Ejemplo (cont)

Resumen: independencia

Teorema de la probabilidad total

$$P(A) = ?$$
$$P(A|B_j) \quad P(B_j)$$

Enunciado

Si $E = \bigcup_{j=1}^J B_j$ disjtos dos a dos

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{j=1}^J P(A|B_j)P(B_j)$$

Demostración (1/2)

$E = B_1 \cup B_2$ disjtos

$$P(A) =$$

Demostración (2/2)

Resumen: teorema de la Prob. Tot.

Estadística: E. Letón

Estadística: E. Letón

Teorema de Bayes



Bayes

(1702-1761)

BAYES BIOGRAPHY

$$P(B_r|A) = ?$$

$$P(A|B_r)$$

$$P(B_r)$$

Enunciado

$$\begin{aligned} E = \bigcup_{j=1}^J B_j \text{ dtos 2 a 2} &\Rightarrow P(B_r | A) \\ &= \frac{P(A|B_r)P(B_r)}{\sum_{j=1}^J P(A|B_j)P(B_j)} \end{aligned}$$

Estadística: E. Letón

Estadística: E. Letón

Demostración (1/2)

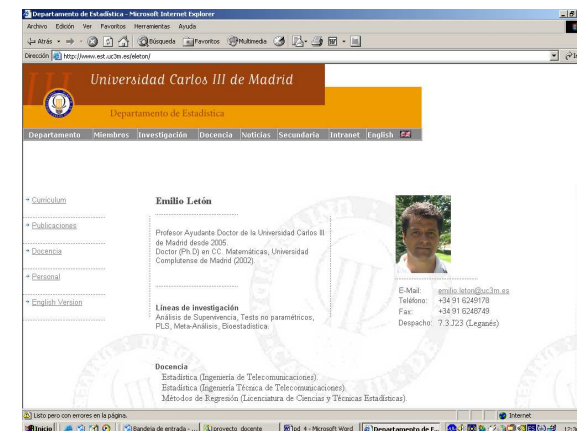
$$P(B_r | A) =$$

Demostración (2/2)

$$P(B_r | A) =$$

Resumen: teorema de Bayes

Webgrafía: web de la asignatura



*Software; Prácticas; ABP; Autoevaluación;
Ejercicios; Mini-Vídeos; CPC; Tutorías; Webgrafía*