MODELOS DE PROBABILIDAD

MODELOS DISCRETOS
MODELOS CONTINUOS
TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Emilio Letón
Dpto. Estadística, UC3M

¿Dónde estamos?

DESCR. | CÁLC. P. | INFERENCIA

1981

Probabilidad 1988

Variables aleatorias 1994

Modelos de probabilidad 1999

YT: DLICBTO

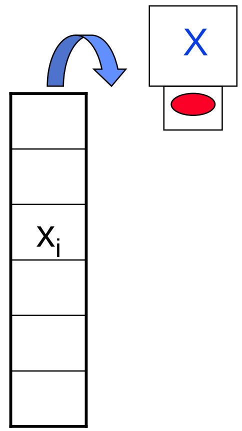
I could be your sea of sand
I could be your warmth of desire
I could be your prayer of hope
I could be ordinary
I could be your green eyed monster

Frentes abiertos

P(suceso)

$$P(a < X \leq b)$$

Catálogo de modelos



¿A qué se parece diag. barras / hist.?

Naturaleza del fenómeno

MODELOS DISCRETOS

Uniforme discr., Bernoulli, Binomial
Geométrica, Poisson

MODELOS CONTINUOS

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

MODELOS DISCRETOS

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

$$P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_i \leq b} p(x_i)$$

Media y varianza

$$E\left[X^n\right] = \sum_x x^n p(x)$$

$$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

$$= E\left[X^2\right] - E^2[X]$$

Otras estadísticos

$$E\left[(X-\mu)^k\right]=\sum_x (x-\mu)^k p(x)$$

$$CV[X]=\frac{D[X]}{|E[X]|}$$

Uniforme discreta

$E=\{S_1,\ldots,S_k\} \longrightarrow \{1,\ldots,k\}$

Función de probabilidad (1/2)

$$X \approx \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k \\ p(1) & \ldots & p(k) \end{pmatrix} \approx UniD(k)$$

Función de probabilidad (2/2)

$$p(x)=\frac{1}{k} \qquad x=1,\ldots,k$$

F(x) (1/2)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \cdots, \quad x<1 \\ 1/k & , \quad 1\le x<2 \\ 1/k+1/k & , \quad 2\le x<3 \\ & \ldots \\ 1 & , \quad k\le x \end{cases}$$

F(x) (2/2)

Media

$$E[X]=$$

$$=\frac{(k+1)}{2}$$

Varianza (1/2)

$$E\left[X^2\right]=$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k+1)$$

Varianza (2/2)

$$V[X] = \frac{1}{6}(k+1)(2k+1) - \frac{(k+1)^2}{2^2}$$

$$= \frac{1}{12}\left(k^2 - 1\right)$$

Resumen: uniforme discreta

Bernoulli

$$\boxed{E = \{S, \overline{S}\} \to \{1,0\}}$$

James Bernoulli

(Jaime, Jacobo, Santiago, Iago);

fin XVII

Función de probabilidad (1/2)

$$X \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix} \approx Ber(p)$$

Función de probabilidad (2/2)

$$p(x) = \begin{cases} p & , x = 1 \\ 1 - p & , x = 0 \end{cases}$$

F(x) (1/2)

$$\begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - p & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \le x \end{cases}$$

F(x) (2/2)

Media

$$E[X] =$$

$$= p$$

Varianza (1/2)

$$E\left[X^2\right] =$$

$$= p$$

Varianza (2/2)

$$V[X] = p - p^2$$

$$= pq$$

CAS

$$CAS[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3} =$$

$$= \frac{q-p}{\sqrt{pq}}$$

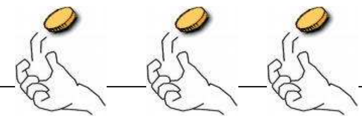
CV

$$CV[X] = \frac{\sqrt{pq}}{|p|} =$$

$$= \sqrt{\frac{q}{p}}$$

Resumen: Bernoulli

Binomial



Número de "éxitos" observados al repetir n veces un experimento Bernoulli

$$E = \{SSS, SS\bar{S}, S\bar{S}S, S\bar{S}\bar{S}, \bar{S}\bar{S}\bar{S}, \bar{S}\bar{S}S, \bar{S}S\bar{S}, \bar{S}SS\}$$

$$\rightarrow \{0,1,2,3\}$$

Función de probabilidad (1/3)

$$X \approx \begin{pmatrix} 0 & \dots & n \\ p(0) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \approx Bin(n,p)$$

Función de probabilidad (2/3)

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Función de probabilidad (3/3)

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

F(x) (1/2)

$$\begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ q^n & , \ 0 \le x < 1 \\ q^n + npq^{n-1} , & 1 \le x < 2 \\ \ldots & \\ 1 & , \ n \le x \end{cases}$$

F(x) (2/2)

Media (1/2)

$$E[X] =$$

$$Ber(p) + \ldots + Ber(p) = Bin(n, p)$$

Media (2/2)

$$E[X] =$$

$$= np$$

Varianza

$$V[X] =$$

$$= npq$$

Resumen: binomial

Geométrica

...

Número de repeticiones de un experimento Bernoulli hasta obtener el primer éxito

$$E = \{S, \bar{S}S, \bar{S}\bar{S}S, \bar{S}\bar{S}\bar{S}S, \ldots\}$$

$$\to \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Función de probabilidad (1/3)

$$X \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ p(1) & p(2) & \ldots \end{pmatrix} \approx Geo(p)$$

Función de probabilidad (2/3)

$$p(x) = (1-p)^{x-1} p$$

Función de probabilidad (3/3)

$$p(x) = (1-p)^{x-1} p$$

F(x) (1/2)

$$\begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ p & , \quad 1 \le x < 2 \\ p + (1-p)p, & 2 \le x < 3 \\ \ldots & \\ \ldots & \end{cases}$$

F(x) (2/2)

Media

$$E[X] =$$

$$= pS = p\frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p}$$

Varianza (1/2)

$$E\left[X^2\right] =$$

$$= pS = p\frac{1 + 2q\dfrac{1}{1-q}}{p^2}$$

$$= \frac{1+q}{p^2}$$

Varianza (2/2)

$$V[X] = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

Resumen: geométrica

Series

$$S = a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \ldots$$

Ejemplo 1

$$S = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{p}$$

Ejemplo 2

$$S = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots$$

$$Sq = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

Ejemplo 3

$$S = 1 + 4q + 9q^2 + \dots$$

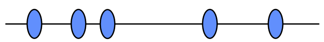
$$(S - Sq) - S(1-q)q =$$

$$= 1 + 2q\,\tfrac{1}{1-q}$$

Resumen: series

Poisson

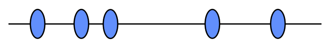
Número de aparición de sucesos a lo largo de un soporte continuo
(tiempo, área, longitud, …)



Médico militar fr; fin. XIX

Poi: función de probabilidad (1/4)

$$X \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots \\ p(0) & p(1) & \dots & \dots \end{pmatrix} \approx Poi(\quad)$$



Poi: función de probabilidad (2/4)

Poi: función de probabilidad (3/4)

After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\lim_{x \to 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example. This was the result:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5} = 5$$

Poi: función de probabilidad (4/4)

$$p(x) = \ldots = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

F(x) (1/2)

$$\begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ e^{-\lambda} & , \quad 0 \le x < 1 \\ e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\lambda & , \quad 2 \le x < 3 \\ \ldots & \\ \ldots & \end{cases}$$

F(x) (2/2)

Media

$$E[X] =$$

$$= \lambda$$

Varianza (1/2)

$$E\left[X^2\right] =$$

$$= \lambda + \lambda^2$$

Varianza (2/2)

$$V[X] = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

Resumen: Poisson

Reproductibilidad Poisson

$$X_i \ v.a.i.i.d. \approx Poi(\lambda_i) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx Poi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Ejemplo

Llamadas a una centralita son suc. ind. y con una media de 5 llamadas al minuto. Describir:

X: número de llamadas en un minuto

Y: número de llamadas en una hora

$$\lambda_x = 5 \frac{llam.}{\text{min.}} \quad \lambda_y = 300 \frac{llam.}{\text{h.}}$$

Resumen: reprod. Poisson

MODELOS DISCRETOS

MODELOS CONTINUOS

Uniforme continua, Normal, Exponencial, Weibull, LNormal, Ji-Cuadrado, t-Student, F

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

MODELOS CONTINUOS

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Media y varianza

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx$$

$$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

$$= E\left[X^2\right] - E^2[X]$$

Otras estadísticos

$$E\left[(X-\mu)^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f(x)dx$$

$$CV[X] = \frac{D[X]}{|E[X]|}$$

Uniforme continua

Función de densidad (1/2)

Función de densidad (2/2)

F(x) (1/2)

F(x) (2/2)

Media

$$E[X] =$$

$$= \frac{1}{2}(a + b)$$

Varianza (1/2)

$$E[X^2] =$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

Varianza (2/2)

$$V[X] = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{12}(b - a)^2$$

CAS

$$CAS[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3} =$$

$$= 0$$

Resumen: uniforme continua

Normal

Función de densidad (1/3)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad , x \in \Re$$

$$X \approx N(\mu, \sigma)$$

Función de densidad (2/3)

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-1}{2} z^2} \quad , z \in \Re$$

$$Z \approx N(0,1)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Función de densidad (3/3)

F(x) (1/2)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Tablas

F(x) (2/2)

Media

$$E[X] =$$

$$= \mu$$

Varianza (1/2)

$$E\left[X^2\right] =$$

$$= \mu^2 + \sigma^2$$

Varianza (2/2)

$$V[X] = \mu^2 + \sigma^2 - \sigma^2$$

$$= \sigma^2$$

Propiedades (1/4)

- Tiene forma de campana.
- Simétrica alrededor de μ

=media, mediana, moda.
- El p.i. de su curvatura está a distancia sigma de su eje de simetría.

Propiedades (2/4)

k	%Obs.	Cheb.	Cheb.S.U.
1	68.3%	0%	55.6%
2	95.4%	75.0%	88.9%
3	99.7%	88.9%	97.2%
1.96	95%	74.0%	88.4%

Propiedades (3/4)

$$X \approx N(\mu, \sigma) \Rightarrow$$

$$a + bX \approx N(a + b\mu, |b|\sigma)$$

Propiedades (4/4)

$$X_i \approx N(\mu_i, \sigma_i)\, v.a.i.i.d. \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \approx N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2}\right)$$

Resumen: normal

Función Q

$$Q(x) = P(X > x) = 1 - \Phi(x)$$

$$= \int_x^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Q: propiedades (1/2)

$$Q(-x) = 1 - Q(x)$$

Q: propiedades (2/2)

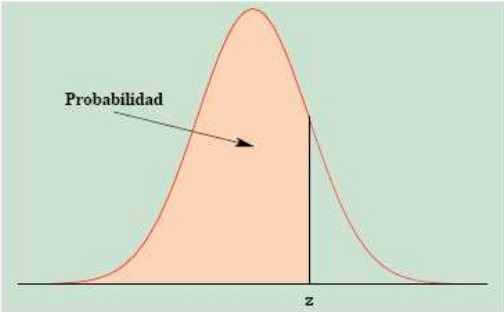
$$Q(0) =$$

$$Q(-\infty) =$$

$$Q(+\infty) =$$

Resumen: función Q

Tabla N(0,1)



Tab N(0,1): ejemplo 1

TABLA Probabilidades de una Normal Estándar

z	,00	,01	,02	,03	,04
0, 0	0, 5000	0, 5040	0, 5080	0, 5120	0, 5160
0, 1	0, 5398	0, 5438	0, 5478	0, 5517	0, 5557
0, 2	0, 5793	0, 5832	0, 5871	0, 5910	0, 5948
0, 3	0, 6179	0, 6217	0, 6255	0, 6293	0, 6331

$$P(Z < 0{,}23) =$$

Tab N(0,1): ejemplo 2

TABLA Probabilidades de una Normal Estándar

z	,00	,01	,02	,03	,04
0, 0	0, 5000	0, 5040	0, 5080	0, 5120	0, 5160
0, 1	0, 5398	0, 5438	0, 5478	0, 5517	0, 5557
0, 2	0, 5793	0, 5832	0, 5871	0, 5910	0, 5948
0, 3	0, 6179	0, 6217	0, 6255	0, 6293	0, 6331

$$P(Z < -0{,}23) =$$

$$P(Z > 0{,}23) =$$

Resumen: Tabla N(0,1)

Cauchy

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\,con\quad x\in\Re$$

Origen

$$tg\left(U\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=C(1,0)$$

$$\frac{N(0,1)}{N(0,1)}=C(1,0)$$

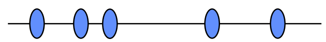
Resumen: Cauchy

Exponencial

Tiempo que pasa entre dos sucesos consecutivos en un proceso Poisson

X=núm. clientes por h. en un mostrador

T=tiempo entre dos clientes consecutivos



Función de distribución (1/3)

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t)$$

$$= 1 - P(no\ haya\ sucesos\ en\ (0,t))$$

$$= 1 - P(X_{Poisson(\lambda t)} = 0) =$$

Función de distribución (2/3)

$$= 1 - P(X_{Poisson(\lambda t)} = 0) =$$

Función de distribución (3/3)

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & si\ t \geq 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & si\ t \geq 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Media

$$E[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \ldots = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza (1/2)

$$E\left[T^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \ldots = \frac{2}{\lambda^2}$$

Varianza (2/2)

$$V[T] = E\left[T^2\right] - E^2[T] = \ldots = \frac{1}{\lambda^2}$$

Mediana

$$t_{med} = \ldots = \frac{1}{\lambda} Ln2$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & si\ t \geq 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

CAS

$$CAS[T] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E\left[(T-\mu)^3\right]}{\sigma^3} = \ldots = 2$$

$$\boxed{E\left[(T-\mu)^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^k f(t)dt}$$

Resumen: Exponencial

Ausencia de memoria (1/2)

$$P(T > 70 \mid T > 60) = P(T > 10)$$

$$P(T > t_1 + t \mid T > t_1) = P(\qquad)$$

Ausencia de memoria (2/2)

$$= \frac{1 - F(t_1 + t)}{1 - F(t_1)}$$

Resumen: ausencia de memoria

Fiabilidad

Tiempo hasta …; T no negativa; T asim.; datos cens.

Función de riesgo

$$h(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{P(t \le T \le t + \delta t \mid T > t)}{\delta t}$$

Función de supervivencia

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^{+\infty} f(x)dx$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{-S'(t)}{S(t)}$$

Resumen: fiabilidad

Weibull

Reparametrización

Caracterización

Media y varianza

Resumen: Weibull

Log-Normal

Caracterización

Media y varianza

Mediana y moda

Resumen: log-normal

Ji-Cuadrado

$$\chi_1^2 = \left(N(0,1)\right)^2$$

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(N(0,1)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}$$

Media y varianza

$$E\left[\chi_n^2\right] = n$$

$$V\left[\chi_n^2\right] = 2n$$

Resumen: Ji-Cuadrado

t-Student

$$X \approx t_n = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

$$X_0, X_1, \ldots, X_n$$

$$v.a.i.i.d. \approx N(0,1)$$

Media y varianza

$$E\left[t_n\right] = 0$$

$$V\left[t_n\right] = \frac{n}{n-2} \quad , n > 2$$

Resumen: t-Student

F-Fisher

$$X \approx F_{m,n} = \frac{\frac{1}{m}\chi_m^2}{\frac{1}{n}\chi_n^2}$$

Media y varianza

Resumen: F-Fisher

MODELOS DISCRETOS

MODELOS CONTINUOS

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Condiciones de aplicación

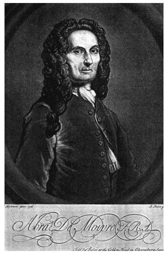
Formas de aplicación

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Hace fácil lo difícil

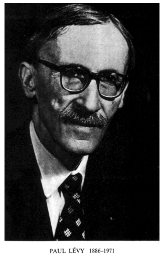
Condiciones de aplicación

Formas de aplicación



De Moivre
(1667-1754)

Laplace
(1749-1827)



Levy
(1886-1971)

Binomial y Normal

Poisson y Normal

Binostato

http://www.educar.org/comun/actividadeseducativas/matematicas/distribucionnormal/default.asp

Resumen: TCL

Webgrafía: web de la asignatura

Software; Prácticas; ABP; Autoevaluación; Ejercicios; Mini-Vídeos; CPC; Tutorías; Webgrafía