Estadística

Soluciones ejercicios: Variables aleatorias

Versión 8

Emilio Letón

1. Nivel 1

1. Enunciar las dos propiedades que debe cumplir $p(x)$ para ser función de probabilidad.

   SOLUCIÓN:

   Las dos propiedades para ser función de probabilidad (o también llamada función de masa) son $0 \leq p\,(x) \leq 1$ y $\sum p\,(x) = 1$ en el soporte (en el conjunto donde toma valores la v.a X).

2. Enunciar las cuatro propiedades que debe cumplir $F(x)$ para ser función de distribución.

   SOLUCIÓN:

   Las cuatro propiedades para ser función de distribución son $F\,(-\infty) = 0, F\,(+\infty) = 1$, monótona no decreciente y continua por la derecha.

3. Decir si es verdadera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

   "No hay variables aleatorias discretas finitas que tomen valores negativos".

   SOLUCIÓN:

   Es falsa.

   Por ejemplo la v.a. X que toma los valores -1 y $+1$ de forma equiprobable toma valores negativos y positivos y es discreta finita.

4. Sea X variable aleatoria que toma los valores $\{-1, 0, 2\}$. Determinar el valor de a para el cual la función dada por

   $$p\,(x) = \frac{a}{x},\ x = -1, 0, 2$$

   sea una función de probabilidad. ¿Se puede calcular $P\,(X = 0)$ utilizando la función $p\,(x)$?

   SOLUCIÓN:

   En primer lugar, observar que una variable aleatoria no tiene por qué ser siempre positiva, ni tampoco que los valores que pueda tomar sean correlativos. Por otra parte para que una función $p\,(x)$ sea función de probabilidad sobre un rango (soporte) de valores tiene que verificar que en dicho rango

   $$p\,(x) \geq 0$$

   $$\sum_x p\,(x) = 1$$

Pero se observa que $p(x)$ ni siquiera está definida en $x = 0$, por lo que no hay ningún a para el cual la función dada sea de probabilidad. Por lo tanto, no se puede calcular ninguna probabilidad utilizando la función $p(x)$ dada.

5. Enunciar las dos propiedades que debe cumplir $f(x)$ para ser función de densidad.

SOLUCIÓN:

Las dos propiedades para ser función de densidad son $0 \leq f(x)$ y $\int_x f(x)\, dx = 1$.

6. Demostrar que

$$V[X] = E\left[X^2\right] - E^2[X]$$

SOLUCIÓN:

Se tiene que

$$\begin{aligned} V[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] &= E\left[X^2 + \mu^2 - 2X\mu\right] = E\left[X^2\right] + E\left[\mu^2\right] - E[2X\mu] \\ &= E\left[X^2\right] + \mu^2 - 2\mu E[X] = E\left[X^2\right] + \mu^2 - 2\mu^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2 \\ &= E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = E\left[X^2\right] - E^2[X] \end{aligned}$$

7. Si X es una variable aleatoria que toma los valores $\{-1, 0, 2\}$. Determinar los valores de a para los que las funciones siguientes sean de probabilidad

a) $p(x) = a\left(x^2 - 4\right)$.

b) $p(x) = (ax)^2 - 4$.

c) $p(x) = \frac{a}{1-x}$.

d) $p(x) = a - x$.

e) $p(x) = -\left(\frac{a+3}{6}\right)x^2 + \left(\frac{5a+3}{6}\right)x + 1$.

SOLUCIÓN:

a) Para que se verifique que $p(x) \geq 0$ en el rango de valores, se tiene que

$$p(-1) = -3a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$$

$$p(0) = -4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$$

$$p(2) = 0 \geq 0 \ \forall a$$

Por otra parte para que $\sum_x p(x) = 1$ en el rango de valores, se tiene que verificar que

$$p(-1) + p(0) + p(2) = 1 \Leftrightarrow -3a - 4a + 0 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{7}$$

Dado que ambas condiciones son compatibles, para $a = \frac{-1}{7}$ se tiene que $p(x) = \frac{-1}{7}\left(x^2 - 4\right)$ es función de probabilidad. Observar que dado que $p(2) = 0$, en realidad la variable aleatoria que se está considerando, en este caso, es la que toma valores $\{-1, 0\}$.

b) No es función de probabilidad para ningún valor de a porque para $x = 0$, $p(0) = -4 < 0$.

c) Para que se verifique que $p(x) \geq 0$ en el rango de valores, se tiene que

$$p(-1) = \frac{a}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$p(0) = a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$p(2) = -a \geq 0 \ \Leftrightarrow a \leq 0$$

Para que esas condiciones sean compatibles $a = 0$ y entonces la función dada sería $p(x) = 0$, con lo que no puede verificar que $\sum_x p(x) = 1$ en el rango de valores. Por tanto no hay ningún a que haga que la función dada sea de probabilidad. Observar que no hay problemas en la definición de $p(x)$, pues $x = 1$ que anularía el denominador, no está en el rango de valores de X.

d) Para que se verifique que $p(x) \geq 0$ en el rango de valores, se tiene que

$$p(-1) = a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -1$$

$$p(0) = a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$p(2) = a - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$$

Para que esas condiciones sean compatibles, $a \geq 2$.
Por otra parte para que $\sum_x p(x) = 1$ en el rango de valores, se tiene que verificar que

$$p(-1) + p(0) + p(2) = a + 1 + a + a - 2 = 3a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Por tanto no es compatible con lo anterior de que $a \geq 2$. Por lo que no hay ningún a que haga que la función dada sea de probabilidad.

e) Para que se verifique que $p(x) \geq 0$ en el rango de valores, se tiene que

$$p(-1) = \frac{-a - 3 - 5a - 3 + 6}{6} = -a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$$

$$p(0) = 1 \geq 0 \ \forall a$$

$$p(2) = \frac{-4a - 12 + 10a + 6 + 6}{6} = a \geq 0 \ \Leftrightarrow a \geq 0$$

Para que esas condiciones sean compatibles, $a = 0$.
Por otra parte para que $\sum_x p(x) = 1$ en el rango de valores, se tiene que verificar que

$$p(-1) + p(0) + p(2) = -a + 1 + a = 1 \forall a$$

Por tanto para que sea compatible con lo anterior, $a = 0$. Observar que en este caso $a = 0$ no anula la función $p(x)$.

8. Sea X variable aleatoria que toma los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ con función de probabilidad

$$p(x) = a(1 + x), \ x = 1, 2, 3, 4$$

Se pide calcular:

a) El valor a para que realmente $p(x)$ sea realmente una función de probabilidad.

b) $P(X = 0)$.

c) $P(X = 1)$.

d) $P(X\ impar)$.

e) $P(\{1, 2\})$

f) $P(\{por\ lo\ menos\ 1\})$

SOLUCIÓN:

a) Para que se verifique que $p(x) \geq 0$ en el rango de valores, se tiene que

$$p(1) = 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$p(2) = 3a \geq 0 \ \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$p(3) = 4a \geq 0 \ \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$p(4) = 5a \geq 0 \ \Leftrightarrow a \geq 0$$

Por otra parte para que $\sum_x p(x) = 1$ en el rango de valores, se tiene que verificar que

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 14a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{14}$$

Dado que ambas condiciones son compatibles, para $a = \frac{1}{14}$ se tiene que $p(x) = a(1 + x)$ es función de probabilidad.

b) $P(X = 0) = 0$ porque la variable aleatoria X nunca toma el valor 0.

c) $P(X = 1) = p(1) = \frac{1}{7}$.

d) $P(X\ impar) = P(\{1\} \cup \{3\}) = p(1) + p(3) = \frac{6}{14}$.

e) $P(\{1, 2\}) = P(\{1\} \cup \{2\}) = p(1) + p(2) = \frac{5}{14}$.

f) $P(\{por\ lo\ menos\ 1\}) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}) = 1$.

9. Sea X una variable aleatoria triangular continua $TriCont(0, 2)$ cuya función de densidad $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ a(2 - x) & 1 < x < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Determinar a para que $f(x)$ sea realmente función de densidad.

b) Dibujar $f(x)$. ¿Cuál es la razón de que a $f(x)$ se la denomine triangular continua.

c) Con la ayuda del gráfico $f(x)$ comprobar por procedimientos geométricos que el área bajo la curva de $f(x)$ es 1.

d) Determinar $F(x)$. Una vez calculada, comprobar que cumple las cuatro condiciones para ser función de distribución.

e) Calcular $P(0{,}3 < X \leq 1{,}5)$ utilizando la función de densidad $f(x)$.

f) Calcular $P(0{,}3 < X \leq 1{,}5)$ utilizando la función de distribución $F(x)$.

g) Calcular $P(0{,}3 < X \leq 1{,}5)$ utilizando razonamientos geométricos.

SOLUCIÓN:

a) Para que $f(x)$ sea función de densidad tiene que verificar que $f(x) \geq 0$ y que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$. Por tanto para que $f(x) \geq 0$ se tiene que $a \geq 0$ y para la segunda condición

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)\, dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 a(2-x)\, dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^1 + \left(2ax - \frac{a}{2}x^2\right)_1^2 \\ &= \frac{1}{2} + \left(4a - 2a - 2a + \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1+a}{2} \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{1+a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Para que se verifiquen las dos condiciones se tiene que $a = 1$.

b) Si se dibuja $f(x)$ se obtiene un triángulo sobre el segmento $[0, 2]$, de ahí el nombre de triangular y continua porque la v.a X está definida sobre un contínuo de valores.

c) Basta con calcular el área del triángulo, que al ser base por altura dividido por 2 es

$$\frac{(2-0)\cdot 1}{2} = 1$$

d) Para determinar $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ se tiene que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x tdt & 0 \leq x < 1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)\, dt & 1 \leq x < 2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^2 (2-t)\, dt + \int_2^x 0dt & 2 \leq x \end{cases}$$

por lo que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Efectivamente cumple las cuatro propiedades para ser función de distribción ($F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, $F(x)$ continua por la derecha (es más, es continua) y $F(x)$ monótona no decreciente).

e) Para calcular $P(0,3 < X \leq 1,5)$ utilizando la función de densidad $f(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} P(0,3 < X \leq 1,5) &= \int_{0,3}^{1,5} f(x)\, dx = \int_{0,3}^{1} x dx + \int_1^{1,5} (2-x)\, dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2\right)_{0,3}^1 + \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)_1^{1,5} = 0,455 + 0,375 = 0,83 \end{aligned}$$

f) Para calcular $P(0,3 < X \leq 1,5)$ utilizando la función de distribución $F(x)$ se tiene que

$$P(0,3 < X \leq 1,5) = F(1,5) - F(0,3) = 2(1,5) - \frac{1}{2}1,5^2 - 1 - \frac{1}{2}0,3^2 = 0,875 - 0,045 = 0,83$$

g) Para calcular $P(0,3 < X \leq 1,5)$ utilizando razonamientos geométricos se tiene que hay que descomponer el área requerida en rectángulos y triángulos, con lo que

$$P(0,3 < X \leq 1,5) = (1-0,3)\cdot 0,3 + \frac{(1-0,3)\cdot 0,7}{2} + (0,5\cdot 0,5) + \frac{0,5\cdot 0,5}{2} = 0,83$$

2. Nivel 2

1. Sea X v.a. con función de distribución $F(x)$. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

   a) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

   b) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$.

   c) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$.

   d) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a)$.

   SOLUCIÓN:

   a) Dado que el suceso $(X \leq b)$ se puede expresar como la unión de los sucesos disjuntos $(a < X \leq b)$ y $(X \leq a)$ se tiene que

   $$P(X \leq b) = P[(a < X \leq b) \cup (X \leq a)] = P(a < X \leq b) + P(X \leq a)$$

   y, por tanto,

   $$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

   b) Dado que el suceso $(a \leq X \leq b)$ se puede expresar como la unión de los sucesos disjuntos $(a < X \leq b)$ y $(X = a)$ se tiene que

   $$P(a \leq X \leq b) = P[(a < X \leq b) \cup (X = a)] = P(a < X \leq b) + P(X = a)$$

   $$= F(b) - F(a) + P(X = a)$$

   c) Dado que el suceso $(a < X \leq b)$ se puede expresar como la unión de los sucesos disjuntos $(a < X < b)$ y $(X = b)$ se tiene que

   $$P(a < X \leq b) = P[(a < X < b) \cup (X = b)] = P(a < X < b) + P(X = b)$$

   y, por tanto,

   $$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) - P(X = b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$$

   d) Dado que el suceso $(a \leq X < b)$ se puede expresar como la unión de los sucesos disjuntos $(a < X < b)$ y $(X = a)$ se tiene que

   $$P(a \leq X \leq b) = P[(a < X < b) \cup (X = a)] = P(a < X < b) + P(X = a)$$

   $$= F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a)$$

2. Se dice que una v.a. X es simétrica en torno a α si, por definición, $P(X \leq \alpha - x) = P(X \geq \alpha + x)$. Demostrar que esta condición es equivalente a que se verifique que $F(\alpha - x) = 1 - F(\alpha + x) + P(X = \alpha + x)$ y que en el caso de que X sea continua es equivalente a $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$.

   SOLUCIÓN:

   Se deja para el alumno.

3. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo.

a) Para cualquier X v.a. se verifica que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b).$$

b) Si X es v.a. discreta o continua entonces se verifica, si $a < b < c$, que $P(a \leq X \leq c) = P(a \leq X \leq b) + P(b \leq X \leq c)$.

c) Las condiciones sobre $p(x)$ en v.a. discretas de que $0 \leq p(x) \leq 1$ y que $\sum_x p(x) = 1$ se traducen a $f(x)$ en v.a. continuas de forma que $0 \leq f(x) \leq 1$ y que $\int_x f(x)\,dx = 1$.

d) Sea X v.a. con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

entonces su función de distribución viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & 0 < x < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

e) Si X es una v.a. discreta finita entonces se verifica que $E[X] \geq 0$.

SOLUCIÓN:

a) Es falsa.

En general se verifica que

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a).$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b).$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a).$$

Si además X es v.a. continua, se tiene que $P(X = x) = 0$ y por tanto, en ese caso

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b).$$

b) Es falsa.

En general se tiene que

$$P(a \leq X \leq b) + P(b \leq X \leq c)$$

$$= F(b) - F(a) + P(X = a) + F(c) - F(b) + P(X = b)$$

$$= F(c) - F(a) + P(X = a) + P(X = b) = P(a \leq X \leq c) + P(X = b)$$

Se observa que en el caso de que X sea v.a. continua, sí se verifica que $P(a \leq X \leq c) = P(a \leq X \leq b) + P(b \leq X \leq c)$.

c) Es falsa.

Las condiciones sobre $f(x)$ en v.a. continuas son $0 \leq f(x)$ y que $\int_x f(x)\,dx = 1$. Se observa que $f(x)$ puede ser superior a 1 ya que $f(x)$ no es una probabilidad.

d) Es falsa.

Directamente se observa que la función de distribución dada no cumple las cuatro propiedades para ser función de distribución (en concreto falla porque $F(+\infty) \neq 1$, $F(x)$ no es continua por la derecha y no es monótona no decreciente).

Para determinar $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ se tiene que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}tdt & 0 \leq x < 2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}tdt + \int_{2}^{x} 0dt & 2 \leq x \end{cases}$$

por lo que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 0 + 1 + 0 = 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Efectivamente cumple las cuatro propiedades para ser función de distribución ($F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, $F(x)$ continua por la derecha (es más, es continua) y $F(x)$ monótona no decreciente).

e) Es falsa.

Por ejemplo la v.a discreta X que toma los valores -1 con probabilidad $\frac{3}{4}$ y $+1$ con probabilidad $\frac{1}{4}$ cumple que

$$E[X] = (-1) \cdot \frac{3}{4} + (+1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2} < 0$$

4. Sea X v.a. continua que verifica que $P(X > 4) = 0{,}50$ y que $P(X < 4{,}3) = 0{,}65$. Decir si es verdadero o falso el siguiente razonamiento:

$$P(4 < X < 4{,}3) = P((4 < X) \cap (X < 4{,}3)) = P(4 < X) \cdot P(X < 4{,}3) = 0{,}50 \cdot 0{,}65 = 0{,}325$$

En el supuesto de que sea falso el razonamiento, calcular el valor verdadero de $P(4 < X < 4{,}3)$.

SOLUCIÓN:

Falso. Ya que

$$P(4 < X < 4{,}3) = F(4{,}3) - F(4) = P(X \leq 4{,}3) - P(X \leq 4) = 0{,}65 - (1 - 0{,}50) = 0{,}15.$$

El paso $P((4 < X) \cap (X < 4{,}3)) = P(4 < X) \cdot P(X < 4{,}3)$ sería cierto si lo sucesos fueran independientes y no lo son. Para ver que no son independientes, se observa que:

$$P(4 < X | X < 4{,}3) = \frac{P(4 < X < 4{,}3)}{P(X < 4{,}3)} = \frac{0{,}15}{0{,}65} = 0{,}23 \neq 0{,}50 = P(4 < X).$$