Estadística

Soluciones ejercicios: Probabilidad

Versión 8

Emilio Letón

1. Nivel 1

1. Demostrar las propiedades siguientes relativas a las operaciones con sucesos

	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$

SOLUCIÓN:

A modo de ejemplo se probará la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección, es decir

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

En primer lugar se prueba la inclusión " $\subset$ ". Para ello se supone que $x \in A \cup (B \cap C)$, por lo que $x \in A$ ó $x \in B \cap C$. En ambos casos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ya que si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$ y en el otro caso si $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ y $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$.

En segundo lugar se prueba la inclusión " $\supset$ ". Para ello se supone que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, con lo que $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$. Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$ y si $x \notin A$, al ser $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$, se tiene que $x \in B \cap C$ y por tanto $x \in A \cup (B \cap C)$.

2. Decir si es verdera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo, y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

"Si A y B son dos sucesos cualesquiera se verifica que $A \cup B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$."

SOLUCIÓN:

Es verdadera.

En primer lugar se prueba la inclusión " $\subset$ ". Para ello se supone que $x \in A \cup B$, por lo que $x \in A$ ó $x \in B$. Si $x \in A$ y $x \notin B \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$ y por tanto $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$. Si $x \notin A$ y $x \in B \Rightarrow x \in \overline{A} \cap B$ y por tanto $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$. Por último si $x \in A$ y $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ y por tanto $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$.

En segundo lugar se prueba la inclusión " $\supset$ ". Si . $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$ ó $x \in \overline{A} \cap B$ ó $x \in A \cap B$. Y en cualquier caso se tiene que $x \in A \cup B$.

3. Demostrar las Leyes de Morgan para la unión y la intersección de sucesos. Es decir, demostrar que:

   a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. En general $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

   b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.En general $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

   SOLUCIÓN:

   a) En primer lugar se prueba la inclusión " $\subset$ ". Para ello si $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A$ y $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. En segundo lugar se prueba la inclusión " $\supset$ " de forma análoga a la inclusión " $\subset$ ". El caso general se prueba por inducción.

   b) Análogo al caso a).

4. Si en una tarea manual existe una probabilidad de cometer un fallo igual a 0,01, si esta operación hay que repetirla 100 veces, ¿cuál será la probabilidad de cometer al menos un fallo en las 100 repeticiones?

   SOLUCIÓN:

   Sea F el suceso "cometer al menos un fallo" y sea F_i el suceso "cometer un fallo en el movimiento i", se trata, por tanto, de calcular $P(F)$, que es igual a

$$P(F) = 1 - P\left(\overline{F}\right) = 1 - P\left(\overline{F_1} \cap ... \cap \overline{F_n}\right) = 1 - \left[(1-0{,}01)^{100}\right] = 0{,}63.$$

5. Sean A y B sucesos compatibles e independientes con $P\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{4}$ y con $P(A) = \frac{1}{8}$. Determinar:

   a) $P(B \mid A)$.

   b) $P(A \cap B)$.

   c) $P(A \cup B)$.

   d) $P(A \mid A \cup B)$

   e) $P(B \mid A \cup B)$

   f) Si C es tal que $P(C) = \frac{3}{8}$, ¿pueden ser B y C incompatibles?

   SOLUCIÓN:

   a) $P(B \mid A) \overset{ind.}{=} P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

   b) $P(A \cap B) \overset{ind.}{=} P(A)\,P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32} = 0{,}094$.

   c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{3}{32} = \frac{25}{32} = 0{,}78$.

   d) Para calcular $P(A \mid A \cup B)$ se observa que

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$$

   por lo que $P(A \mid A \cup B) = \frac{1/8}{25/32} = \frac{32}{200} = 0{,}16$.

   e) De forma análoga al apartado anterior $P(B \mid A \cup B) = \frac{P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{3/4}{25/32} = \frac{24}{25} = 0{,}96$.

   f) Si B y C fueran incompatibles entonces $B \cap C = \varnothing$ con lo que $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} > 1$, con lo que se llegaría a un absurdo, por lo que B y C no pueden ser incompatibles.

6. ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto de n elementos?

   SOLUCIÓN:

   Se pueden formar $\binom{n}{0}$ subconjuntos con 0 elementos , $\binom{n}{1}$ subconjuntos con 1 elementos, $\binom{n}{2}$ subconjuntos con 2 elementos, ..., $\binom{n}{n}$ subconjuntos con n elementos. En total se pueden formar

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

7. En una prueba diagnóstica se sabe que $P(- \mid Sano) = 98\,\%$ y que $P(+ \mid Enf) = 98\,\%$. Esta prueba diagnóstica se aplica a un individuo y da positivo, ¿qué probabilidad tiene de estar enfermo? (elegir una de las siguientes contestaciones):

   a) Entre $(0, 0{,}2]$.
   b) Entre $(0{,}2, 0{,}4]$.
   c) Entre $(0{,}4, 0{,}6]$.
   d) Entre $(0{,}6, 0{,}8]$.
   e) Entre $(0{,}8, 1]$.
   f) No hay datos suficientes para saber la probabilidad que se pide.

   SOLUCIÓN:

   La respuesta correcta es la f), ya que para poder aplicar el Teorema de Bayes se necesita saber $P(Enf)$.

8. En una prueba diagnóstica se sabe que $P(- \mid Sano) = 98\,\%$ y que $P(+ \mid Enf) = 98\,\%$ y además que la $P(Enf) = 0{,}04$. Esta prueba diagnóstica se aplica a un individuo y da positivo, ¿qué probabilidad tiene de estar enfermo? (elegir una de las siguientes contestaciones):

   a) Entre $(0, 0{,}2]$.
   b) Entre $(0{,}2, 0{,}4]$.
   c) Entre $(0{,}4, 0{,}6]$.
   d) Entre $(0{,}6, 0{,}8]$.
   e) Entre $(0{,}8, 1]$.
   f) No hay datos suficientes para saber la probabilidad que se pide.

   SOLUCIÓN:

   La respuesta correcta es la d), aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(Enf|+) = \frac{P(+|Enf)\,P(Enf)}{P(+|Enf)\,P(Enf) + P(+|Sano)\,P(Sano)}$$

$$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}04}{0{,}98 \cdot 0{,}04 + 0{,}02 \cdot 0{,}96} = 0{,}67$$

   Obsérvese que el resultado correcto está muy alejado de ser muy alto (es porque la $P(Enf)$ es baja) y que desde luego no es 0.98.

9. Una aseguradora tiene clientes de riesgo alto, medio y bajo. Estos clientes tienen probabilidades de 0,02, 0,01 y 0,0025 de rellenar un impreso de reclamación. Si la proporción de clientes de alto riesgo es 0,1, de riesgo medio 0,2 y de bajo riesgo es 0,7. ¿Cuál es la probabilidad de que un impreso rellenado sea de un cliente de alto riesgo?

   SOLUCIÓN:

   Se definen los sucesos:

   $A =$"el cliente es de alto riesgo", $M =$"el cliente es de medio riesgo", $B =$"el cliente es de bajo riesgo" y $R =$"el cliente reclama". Con esta notación, se tiene por los datos del enunciado que

   $$P(R|A) = 0,02;\ P(A) = 0,1$$

   $$P(R|M) = 0,01;\ P(M) = 0,2$$

   $$P(R|B) = 0,0025;\ P(B) = 0,7$$

   Observar que $P(R|A) + P(R|M) + P(R|B)$ no tiene por qué ser 1. Lo que sí tiene que verificarse es que $P(A|R) + P(M|R) + P(B|R) = 1$ y que $P(A) + P(M) + P(B) = 1$.

   La probabilidad solicitada, por el teorema de Bayes, es

   $$\begin{aligned} P(A|R) &= \frac{P(R|A)\,P(A)}{P(R|A)\,P(A) + P(R|M)\,P(M) + P(R|B)\,P(B)} \\ &= \frac{0,02 \cdot 0,1}{0,02 \cdot 0,1 + 0,01 \cdot 0,2 + 0,0025 \cdot 0,7} = 0,3478 \end{aligned}$$

10. Un componente eléctrico se empaqueta en lotes de 25 unidades. Se rechaza el lote si al inspeccionar un máximo de dos componentes alguno es defectuoso.

    a) Un inspector realiza el siguiente procedimiento de inspección: extrae primeramente un componente; si resulta defectuoso se rechaza el lote. Si este primer componente es aceptable se extrae el segundo. Si este segundo también es aceptable se acepta el lote entero.

    b) Un segundo inspector utiliza un aparato donde introduce dos componentes simultáneamente, rechazando el lote si alguno es defectuoso.

    Cierto lote contiene 4 componentes defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar ese lote por cada uno de los inspectores?

    SOLUCIÓN:

    a) Se definen los sucesos:

    $R_1 =$"el inspector 1 rechaza el lote", $D_1 =$"el primer componente es defectuoso", $D_2 =$"el segundo componente es defectuoso" y $R_2 =$"el inspector 2 rechaza el lote". Con esta notación, se tiene que

    $$\begin{aligned} P(R_1) &= P\left(D_1 \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right) = P(D_1) + P\left(\overline{D}_1 \cap D_2\right) - P\left(D_1 \cap \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right) \\ &= P(D_1) + P\left(\overline{D}_1\right) P\left(D_2|\overline{D}_1\right) = \frac{4}{25} + \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{24} = 0,16 + 0,14 = 0,30 \end{aligned}$$

    b) Para el segundo inspector:

    $$P(R_2) = 1 - P\left(\overline{R}_2\right) = 1 - \frac{\binom{21}{2}}{\binom{25}{2}} = 1 - \frac{\frac{21!}{2!19!}}{\frac{25!}{2!23!}} = 1 - \frac{\frac{21 \cdot 20}{2}}{\frac{25 \cdot 2 \cdot 4}{2}} = 0,30$$

    Por lo que la probabilidad de rechazar ese lote es igual para cada inspector.

11. Se aplica una prueba médica T para detectar la presencia de alergias en los trabajadores de una fábrica. Se admite, por los estudios realizados en este sector laboral, que la proporción de individuos con alergia en este tipo de trabajadores es del 14 %. En tales estudios se ha establecido que aproximadamente el 17 % de los individuos da positivo y el 5 % de las personas con alergia dan negativo. Calcular:

   a) La proporción de trabajadores que no tienen alergia y dan positivo.

   b) La proporción de trabajadores que tienen alergia y dan negativo

   SOLUCIÓN:

   a) Se definen los sucesos:
   $A =$"la persona tiene alergia" y $T =$"el test da positivo". Con esta notación, se tiene por los datos del enunciado que

   $$P(A) = 0,14;\ P(T) = 0,17$$

   $$P\left(\overline{T}|A\right) = 0,05$$

   La probabilidad solicitada es $P\left(\overline{A} \cap T\right)$, que es

   $$P\left(\overline{A} \cap T\right) = P\left(T|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right)$$

   y dado que, por el teorema de la probabilidad total, se tiene que

   $$P(T) = P\left(T|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right) + P(T|A) P(A)$$

   por lo que

   $$P\left(T|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right) = P(T) - P(T|A) P(A) = 0,17 - (1 - 0,05) \cdot 0,14 = 0,037$$

   con lo que $P\left(\overline{A} \cap T\right) = 0,037$.

   b) Se pide calcular $P\left(A \cap \overline{T}\right)$, que es

   $$P\left(A \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{T}|A\right) P(A) = 0,05 \cdot 0,14 = 0,007$$

12. Una caja contiene 24 bombillas, de las cuales 4 son defectuosas. Si una persona selecciona 4 sin reeemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que las 4 sean defectuosas?

   SOLUCIÓN:

   La probabilidad de que las 4 sean defectuosas es

   $$\frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{20}{0}}{\binom{24}{4}} = 0,00009$$

   Otra forma es calcular

   $$\frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} \cdot \frac{2}{22} \cdot \frac{1}{21} = 0,00009$$

13. En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0,1. Si este se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0,95. La probabilidad de que la alarma funcione sin haber existido peligro es 0,03. Hallar la probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya existido peligro.

SOLUCIÓN:

Se definen los sucesos: $D =$"existe peligro" y $A =$"suena la alarma". Con esta notación, se tiene por los datos del enunciado que

$$P(D) = 0,10$$

$$P(A|D) = 0,95; \; P\left(A|\overline{D}\right) = 0,03$$

La probabilidad solicitada, por el teorema de Bayes, es

$$P\left(\overline{D}|A\right) = \frac{P\left(A|\overline{D}\right)P\left(\overline{D}\right)}{P\left(A|\overline{D}\right)P\left(\overline{D}\right) + P(A|D)P(D)} = \frac{0,03 \cdot 0,90}{0,03 \cdot 0,90 + 0,95 \cdot 0,10} = 0,2213$$

2. Nivel 2

1. Decir si son verderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo:

   a) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

   b) Si se define la diferencia de dos sucesos A y B como $A - B = A \cap \overline{B}$, entonces se verifica que $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

   c) $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$.

   d) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

   SOLUCIÓN:

   a) Verdadero. Al ser $E = A \cup \overline{A}$ ($A, \overline{A}$ disjuntos) $\Rightarrow 1 = P(E) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   b) Falso. Dado que $A = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Sólo en el caso de que $B \subset A$, se tiene que $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

   c) Verdadero. Al ser $A \cup B = (A - B) \cup B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$.

   d) Verdadero. Al ser $B = A \cup (B - A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$.

2. Decir si son verderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo:

   a) $\overline{A}, \overline{B}$ independientes $\Leftrightarrow A, B$ independientes.

   SOLUCIÓN:

   a) En primer lugar,se prueba que si $\overline{A}, \overline{B}$ independientes $\Rightarrow A, B$ independientes. Para ello, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\ &= 1 - \left[P\left(\overline{A}\right) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right] = 1 - P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \\ &\overset{ind.}{=} 1 - P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right) = P(A) - P\left(\overline{B}\right)\left(1 - P\left(\overline{A}\right)\right) \\ &= P(A) - P\left(\overline{B}\right)P(A) = P(A)\left(1 - P\left(\overline{B}\right)\right) = P(A)P(B) \end{aligned}$$

   con lo que, al ser $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, se tiene que A, B independientes.

En segundo lugar, se prueba que si A, B independientes $\Rightarrow \overline{A}, \overline{B}$ independientes. Para ello, se tiene que:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right)$$
$$= 1 - \left[P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)\right] = 1 - P\left(A\right) - P\left(B\right) + P\left(A \cap B\right)$$
$$\overset{ind.}{=} 1 - P\left(A\right) - P\left(B\right) + P\left(A\right) P\left(B\right) = P\left(\overline{A}\right) - P\left(B\right)\left(1 - P\left(A\right)\right)$$
$$= P\left(\overline{A}\right) - P\left(B\right) P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A}\right)\left(1 - P\left(B\right)\right) = P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right)$$

con lo que, al ser $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right)$, se tiene que $\overline{A}, \overline{B}$ independientes.

3. Decir si son verderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo:

   a) Si dos sucesos A y B con $P\left(A\right), P\left(B\right) > 0$ son incompatibles entonces son dependientes.

   b) Si dos sucesos A y B con $P\left(A\right), P\left(B\right) > 0$ son independientes entonces son compatibles.

   SOLUCIÓN:

   a) Verdadera. Si fueran independientes $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right)$, pero como son incompatibles $P\left(A \cap B\right) = 0$, lo cual es imposible porque $P\left(A\right), P\left(B\right) > 0$.

   b) Verdadera. Análogo al caso a).

4. Decir si son verderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo:

   a) Si $A = B \cup C$ entonces $P\left(B \mid A\right) = \frac{P(B)}{P(A)}$.

   b) $P\left(\left(A \cup B\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)\right) = P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$.

   c) $P\left(\overline{\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)}\right) = P\left(A \cup B\right)$.

   d) $P\left(A \cap B \cap C\right) = P(A \mid B \cap C) P\left(B \mid C\right) P\left(C\right)$.

   e) $P\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \left(A \cap B\right)}\right) = 0$.

   SOLUCIÓN:

   a) Verdadera. $P\left(B \mid A\right) = P\left(B \mid B \cup C\right) = \frac{P(B \cap (B \cup C))}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$

   b) Falsa. $P\left(\left(A \cup B\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)\right) = P\left[A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right] = P\left[\left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right] = P\left(A \cap \overline{B}\right)$.

   c) Falsa. $P\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right) = P\left(\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}\right) = P\left(A \cap B\right)$.

   d) Es verdadera.

   Se verifica que:

$$P(A \mid B \cap C) P\left(B \mid C\right) P\left(C\right) = \frac{P\left(A \cap B \cap C\right)}{P\left(B \cap C\right)} \frac{P\left(B \cap C\right)}{P\left(C\right)} P\left(C\right) = P\left(A \cap B \cap C\right)$$

   e) Es verdadera.

   Se verifica que el conjuto dado es el vacío y , por tanto, su probabilidad es nula.

$$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \left(A \cap B\right) = \overline{A} \cup \left[\left(\overline{B} \cup A\right) \cap \left(\overline{B} \cup B\right)\right] = \overline{A} \cup \left[\left(\overline{B} \cup A\right) \cap E\right]$$
$$= \overline{A} \cup \left(\overline{B} \cup A\right) = \overline{A} \cup A \cup \overline{B} = E \cup \overline{B} = E. \Rightarrow \overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \left(A \cap B\right)} = \overline{E} = \varnothing$$

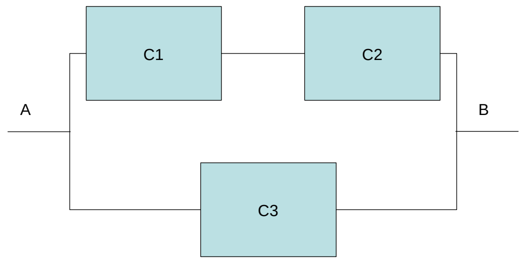

Figura 1: Red de comunicaciones

5. Demostrar que

   a) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
   b) Utilizando a) probar que $P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$.
   c) Utilizando inducción probar que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

   SOLUCIÓN:

   a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$.
   b) $P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \leq P(A \cup B) + P(C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$.
   c) Para $n = 2$ se cumple. Se supone que se cumple para n y se prueba que también se cumple para $n + 1$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i).$$

6. En el circuito eléctrico de 3 componentes concectados según la Figura 1, la probabilidad de que funcione cada uno de los componentes es independiente de los demás, siendo la probabilidad de que funcione el componente 1 de 0.9, el componente 2 de 0,8 y el componente 3 de 0,7. El circuito funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Con los supuestos anteriores, calcular la probabilidad de que el circuito funcione.

   SOLUCIÓN:

   Si se denota por C_{123} al suceso "el circuito funciona", por C_{12} al suceso "el subcircuito formado por los componentes 1 y 2 funciona" y por C_3 al suceso "el subcircuito formado por el componente 3 funciona", la probabilidad que se pide es

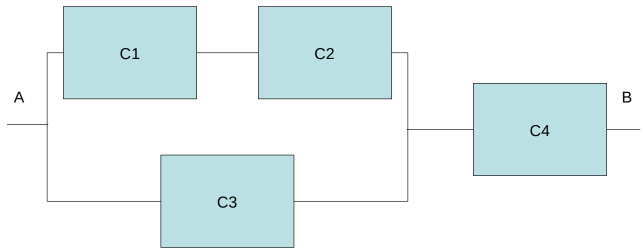

Figura 2: Red de comunicaciones

$$P(C_{123}) = 1 - P\left(\overline{C_{123}}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{12}} \cap \overline{C_3}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{12}}\right) P\left(\overline{C_3}\right) = 1 - (1 - P\left(C_{12}\right)) P\left(\overline{C_3}\right)$$

$$= 1 - (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8)0{,}3 = 0{,}916$$

7. En la red de comunicaciones de 4 componentes concectados según la Figura 2, la probabilidad de que funcione cada uno de los componentes es independiente de los demás, siendo la probabilidad de que funcione el componente 1 de 0.9, el componente 2 de 0,8, el componente 3 de 0,75 y el componente 4 de 0,85. La red funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Con los supuestos anteriores, calcular la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B.

   SOLUCIÓN:

   Si se denota por C_{1234} al suceso "la red funciona", por C_{123} al suceso "la subred formada por los componentes 1, 2 y 3 funciona", por C_{12} al suceso "la subred formada por los componentes 1 y 2 funcionaz por C_4 al suceso "la subred formada por el componente 4 funciona", la probabilidad que se pide es

$$P(\overline{C_{1234}}) = 1 - P\left(C_{1234}\right) = 1 - P\left(C_{123} \cap C_4\right) = 1 - P\left(C_{123}\right) P\left(C_4\right) = 1 - \left[1 - P\left(\overline{C_{123}}\right)\right] P\left(C_4\right)$$

$$= 1 - \left[1 - P\left(\overline{C_{12}} \cap \overline{C_3}\right)\right] P\left(C_4\right) = 1 - \left[1 - P\left(\overline{C_{12}}\right) P\left(\overline{C_3}\right)\right] P\left(C_4\right)$$

$$1 - \left[1 - (1 - P\left(C_1\right) P\left(C_2\right)) P\left(\overline{C_3}\right)\right] P\left(C_4\right) = 1 - [1 - (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8) \cdot 0{,}25] \cdot 0{,}85 = 0{,}21.$$

8. En la red de comunicaciones de 9 componentes conectados según la Figura 3, la probabilidad de que funcione cada componente C_i es de p. La red funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Se supone que la probabilidad de funcionar cada componente es independiente de los demás. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B?

   SOLUCIÓN:

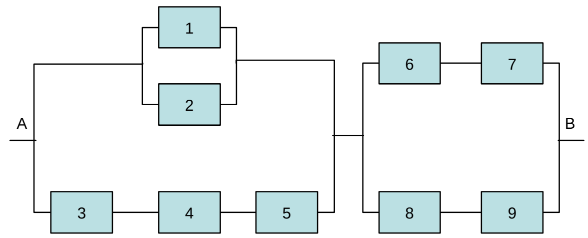

Figura 3: Red de comunicaciones

Si se denota por $C_{123456789}$ al suceso "la red formada por los componentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 funciona", por C_{12345} "la subred formada por los componentes 1, 2, 3, 4 y 5 funciona", y por C_{6789} "la subred formada por los componentes 6, 7, 8 y 9 funciona", la probabilidad requerida en la pregunta es $P(\overline{C_{123456789}})$ que viene dada por:

$$P(\overline{C_{123456789}}) = 1 - P\left(C_{123456789}\right) = 1 - P\left(C_{12345} \cap C_{6789}\right) = 1 - P\left(C_{12345}\right) P\left(C_{6789}\right)$$

La probabilidad $P\left(C_{12345}\right)$ es

$$P\left(C_{12345}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{12345}}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{12}}\right) P\left(\overline{C_{345}}\right) = 1 - \left(P\left(\overline{C_1}\right) P\left(\overline{C_2}\right)\right)\left(1 - P\left(C_{345}\right)\right)$$

$$= 1 - \left((1-p)^2\right)\left(1-p^3\right) = 1 - \left(1 + p^2 - 2p\right)\left(1 - p^3\right)$$

$$= 1 - \left(1 - p^3 + p^2 - p^5 - 2p + 2p^4\right) = p^3 - p^2 + p^5 + 2p - 2p^4$$

y de forma análoga $P\left(C_{6789}\right)$ es

$$P\left(C_{6789}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{6789}}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{67}}\right) P\left(\overline{C_{89}}\right) = 1 - \left(1 - P\left(C_{67}\right)\right)\left(1 - P\left(C_{89}\right)\right)$$

$$= 1 - \left(1 - p^2\right)\left(1 - p^2\right) = 1 - \left(1 + p^4 - 2p^2\right) = -p^4 + 2p^2$$

por lo que la probabilidad de que no haya comunicación es

$$P(\overline{C_{123456789}}) = 1 - \left(p^3 - p^2 + p^5 + 2p - 2p^4\right)\left(-p^4 + 2p^2\right)$$

$$= 1 - \left(-p^7 + 2p^5 + p^6 - 2p^4 - p^9 + 2p^7 - 2p^5 + 4p^3 + 2p^8 - 4p^6\right)$$

$$= 1 - \left(-p^9 + 2p^8 + p^7 - 3p^6 - 2p^4 + 4p^3\right)$$

$$= 1 + p^9 - 2p^8 - p^7 + 3p^6 + 2p^4 - 4p^3$$

9. Un aparato está compuesto por cuatro componentes que funcionan o no de forma independiente entre sí. Las probabilidades de fallo del componente i-ésimo son $p_1 = 0,1, p_2 = 0,2, p_3 = 0,3$ y $p_4 = 0,4$. Se sabe que dos de los cuatro componentes han fallado, calcular la probabilidad de que hayan sido el componente 1 y el componente 2.

SOLUCIÓN:

Sean los sucesos:

$$B = \{\text{"}han\ fallado\ dos\ de\ los\ cuatro\ componentes\}$$

$$A_{ij} = \{\text{"}han\ fallado\ exactamente\ el\ componente\ \text{"}i\text{"}\ y\ el\ \text{"}j\text{"}\}.$$

Por el Teorema de Bayes, se tiene que

$$P(A_{12}|B) = \frac{P(B|A_{12})\,P(A_{12})}{\sum_{i<j} P(B|A_{ij})\,P(A_{ij})} = \frac{1 \cdot P(A_{12})}{\sum_{i<j} 1 \cdot P(A_{ij})}.$$

$$= \frac{P(A_{12})}{P(A_{12}) + P(A_{13}) + P(A_{14}) + P(A_{23}) + P(A_{24}) + P(A_{34})}.$$

Dado que:

$$P(A_{12}) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot (1-0,3) \cdot (1-0,4) = 0,0084$$

$$P(A_{13}) = 0,1 \cdot (1-0,2) \cdot 0,3 \cdot (1-0,4) = 0,0144$$

$$P(A_{14}) = 0,1 \cdot (1-0,2) \cdot (1-0,3) \cdot 0,4 = 0,0224$$

$$P(A_{23}) = (1-0,1) \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot (1-0,4) = 0,0324$$

$$P(A_{24}) = (1-0,1) \cdot 0,2 \cdot (1-0,3) \cdot 0,4 = 0,0504$$

$$P(A_{34}) = (1-0,1) \cdot (1-0,2) \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,0864$$

se tiene que

$$P(A_{12}|B) = \frac{0,0084}{0,2144} = 0,0392.$$