Estadística

Soluciones ejercicios: Modelos de probabilidad

Versión 8

Emilio Letón

1. Nivel 1

1. Durante los fines de semana, un servidor web recibe una media de 20 accesos cada 10 minutos, considerándose estos un proceso Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor esté más de un minuto sin recibir llamadas?

   SOLUCIÓN:

   El parámetro λ es $\lambda = \frac{20\ accesos}{10\ \text{mín}\, utos} = \frac{2\ accesos}{1\ \text{mín}\, uto}$. Por tanto, si se define T la variable aleatoria "tiempo (en minutos) entre accesos", se tiene que dicha variable sería una distribución exponencial de parámetro λ, con lo que

   $$P(T > 1) = 1 - P(T \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda 1}\right) = e^{-2} = 0{,}1353$$

   Otra forma, sería definiendo la variable aleatoria X como "número de accesos al servidor por minuto", con lo que la probabilidad pedida en términos de esta nueva variable aleatorias es

   $$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 0{,}1353.$$

   Observar que si se resuelve el problema mediante la distribución Poisson, no se puede aproximar en este caso por una distribución Normal porque el parámetro no es mayor que 5.

2. El tiempo en milisegundos de espera para acceder a un registro de una base de datos es una v.a. $U(0, 10)$. El tiempo de lectura del registro es de 3 milisegundos.

   a) ¿Qué tipo de v.a. es la v.a. que contabiliza el tiempo total de acceso a un registro definido como la suma de tiempo de espera y el tiempo de lectura?

   b) Calcular la esperanza y la varianza de la v.a. del apartado anterior.

   c) Calcular la probabilidad de que el tiempo de acceso total a 30 registros supere los 240 milisegundos, suponiendo independencia entre tiempos de acceso a registros.

   SOLUCIÓN:

   a) Sea X la v.a. que contabiliza el tiempo total de acceso a un registro, entonces se tiene que $X \sim U(3, 13)$.

   b) En otros ejercicios se ha visto que si $X \sim U(a, b)$ se tiene que $E[X] = \frac{1}{2}(a + b) = 8$ y que $V[X] = \frac{1}{12}(b - a)^2 = \frac{100}{12}$.

c) Sea T la v.a. tiempo de acceso total a 30 registros, con lo que $T = X_1 + ... + X_{30}$ siendo X_i el tiempo total de acceso al registro i. Usando el Teorema central del límite, con $E[T] = 30 \cdot 8 = 240$ y $V[T] = 30 \cdot \frac{100}{12}$ se tiene que

$$P(T > 240) = P\left(\frac{T - 240}{\sqrt{30 \cdot \frac{100}{12}}} > \frac{240 - 240}{\sqrt{30 \cdot \frac{100}{12}}}\right) = P(Z > 0) = 0,5$$

2. Nivel 2

1. Supongamos que se ha de ejecutar una rutina formada por dos subrutinas. Estas subrutinas se ejecutan en paralelo. Sean T_1 y T_2 los tiempos de ejecución de las subrutinas 1 y 2, respectivamente, y sea T el tiempo de ejecución total de la rutina. Suponiendo que T_1 y T_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 100ms^{-1}$, se pide:

   a) Hallar las funciones de distribución y de densidad de probabilidad de T.

   b) Calcular el tiempo medio de ejecución de la rutina.

   c) Calcular la probabilidad de que la rutina se ejecute antes de 1 segundo.

   SOLUCIÓN:

   a) Como la rutina tardará tanto tiempo en ejecutarse como la subrutina que tarde más, se tiene que

   $$F_T(t) = P(T \leq t) = P(máx\{T_1, T_2\} \leq t) = P(T_1 \leq t \cap T_2 \leq t)$$
   $$= (1 - \exp(-\lambda t))^2 = (1 - \exp(-100t))^2$$

   porque ambos tiempos de ejecución son independientes y con igual distribución exponencail.

   La función de densidad de probabilidad será entonces:

   $$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = 200 \exp(-100t)(1 - \exp(-100t)) = 200 \exp(-100t) - 200 \exp(-200t)$$

   b) La media es

   $$E[T] = \int_0^{+\infty} t f_T(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t 200 \exp(-100t)\, dt - \int_0^{+\infty} t 200 \exp(-200t)\, dt$$
   $$= 2\frac{1}{100} - \frac{1}{200} = 0{,}015 ms$$

   c) La probabilidad que hay que calcular es

   $$P(T \leq 1000ms) = \int_0^{1000} 200 \exp(-100t)\, dt - \int_0^{1000} 200 \exp(-200t)\, dt \simeq 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

2. El objetivo de este problema es analizar un canal de comunicaciones. Cuando el canal transmite un 1, el receptor recibe una v.a. que sigue una distribución Normal de media 1 y varianza 0.5. Si el canal binario transmite un 2, el receptor recibe una v.a. Normal con media 2 y varianza 0.5. Sea $P(1)$ la probabilidad de transmitir un 1.

a) Si $P(1) = 0{,}75$. ¿Cuál es la probabilidad de que un 1 haya sido transmitido cuando el receptor ha recibido una señal superior a 2?

b) Calcular la función de densidad de probabilidad de la secuencia recibida.

SOLUCIÓN:

a) Sea T la v.a. "Transmitir un código" y sea R la v.a. "Recibir un código". Se tiene que $P(T=1) = 0{,}75$, $P(T=2) = 0{,}25$ y que

$$R|T = 1 \sim N\left(1, \sigma^2 = 0{,}5\right)$$

$$R|T = 2 \sim N\left(2, \sigma^2 = 0{,}5\right)$$

La probabilidad que hay que calcular es

$$P(T = 1|R > 2) = \frac{P(R > 2|T = 1)\, P(T = 1)}{P(R > 2)}$$

$$= \frac{P(R > 2|T = 1)\, P(T = 1)}{P(R > 2|T = 1)\, P(T = 1) + P(R > 2|T = 2)\, P(T = 2)}$$

Dado que $R|T = 1 \sim N\left(1, \sigma^2 = 0{,}5\right)$, se tiene que

$$P(R > 2|T = 1) = P\left(N\left(1, \sigma^2 = 0{,}5\right) > 2\right) = P\left(Z > \frac{2-1}{\sqrt{0{,}5}}\right) = P(Z > 1{,}41) = 0{,}0793$$

y al ser $R|T = 2 \sim N\left(2, \sigma^2 = 0{,}5\right)$, se tiene que

$$P(R > 2|T = 2) = P\left(N\left(2, \sigma^2 = 0{,}5\right) > 2\right) = P\left(Z > \frac{2-2}{\sqrt{0{,}5}}\right) = P(Z > 0) = 0{,}5$$

Por lo que

$$P(T = 1|R > 2) = \frac{P(R > 2|T = 1)\, P(T = 1)}{P(R > 2|T = 1)\, P(T = 1) + P(R > 2|T = 2)\, P(T = 2)}$$

$$= \frac{0{,}0793 \cdot 0{,}75}{0{,}0793 \cdot 0{,}75 + 0{,}5 \cdot 0{,}25} = 0{,}3223$$

b) La función de distribución de R es

$$F_R(r) = P(R \leq r) = P(R|T = 1)\, P(T = 1) + P(R|T = 2)\, P(T = 2)$$

$$= 0{,}75 \cdot F_{R|T=1}(r) + 0{,}25 \cdot F_{R|T=2}(r)$$

con $F_{R|T=1}(r)$ la función de distribución de una $N\left(1, \sigma^2 = 0{,}5\right)$ y con $F_{R|T=2}(r)$ la función de distribución de una $N\left(2, \sigma^2 = 0{,}5\right)$.

Por lo que la función de densidad de R es

$$f_R(r) = 0{,}75 \cdot f_{R|T=1}(r) + 0{,}25 \cdot f_{R|T=2}(r)$$

con $\mathrm{f}_{R|T=1}(r)$ la función de densidad de una $N\left(1, \sigma^2 = 0{,}5\right)$ y con $f_{R|T=2}(r)$ la función de densidad de una $N\left(2, \sigma^2 = 0{,}5\right)$

3. El tiempo de funcionamiento hasta que se avería el transmisor de señal de un satélite de telecomunicaciones sigue una distribución exponencial de media 10000 días. Para que el lanzamiento del satélite y la inversión realizada sea rentable se exige que la duración sea, al menos, de 10 años.

a) Calcular la probabilidad de que un transmisor elegido al azar, resulte rentable.

b) Si una instalación industrial fabrica 10 transmisores, ¿cuál es la probabilidad de que los diez cumplan las especificaciones?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos una avería en un año?

d) Mantener un servicio de reparaciones para los transmisores cuesta 1000 euros anuales, ¿cuánto debe cobrar como mínimo dicho servicio por reparación para obtener beneficios en un año (es decir que el beneficio esperado en un año sea positivo)?

SOLUCIÓN:

a) Sea $T = tiempo\ hasta\ averia \sim \exp(\lambda)$, $E[T] = \frac{1}{\lambda} = 10000 \frac{dias}{averia}$, con lo que $\lambda = \frac{1}{10000} \frac{averia}{dia}$.

La probabilidad de que un transmisor sea rentable es

$$P\left(T > 3650 \frac{dias}{averia}\right) = 1 - F(3650) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda \cdot 3650}\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{10000} \frac{averia}{dia} 3650 \frac{dia}{averia}} = 0,6942$$

Otra forma de hacer este apartado es:

Sea $X = número\ de\ averias\ en\ 10\ años \sim Poi(\lambda)$ con

$$\lambda = \frac{1}{10000} \frac{averia}{dia} = \frac{1}{10000} \frac{averia}{dia} 365 \frac{dia}{año} = \frac{365}{10000} \frac{10 averias}{10 años} = \frac{3650}{10000} \frac{averias}{10 años}$$

La probablidad de que un transmisor sea rentables es

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = e^{-\frac{3650}{10000}} = 0,6942$$

b) Sea $Y = número\ de\ transmisores\ que\ cumplen\ especificaciones \sim Bin(n = 10, p = 0,6492)$.

La probabilidad de que los 10 transmisores cumplan las especificaciones es

$$P(Y = 10) = \binom{10}{10} p^{10} (1 - p)^{10} = 0,0260$$

c) Sea $X_1 = número\ de\ averias\ en\ 1\ año \sim Poi(\lambda)$ con

$$\lambda = \frac{1}{10000} \frac{averia}{dia} = \frac{365}{10000} \frac{averias}{año}$$

La probablidad de que haya al menos una avería en un año es

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\frac{365}{10000}} = 0,0358$$

d) Sea $G_1 = ganancia\ en\ un\ año = Tarifa \cdot X_1$. con $X_1 = número\ de\ averias\ en\ 1\ año.$

Las unidades de la $Tarifa$ son $\frac{euros}{averia}$, las unidades de X_1 son $\frac{averia}{año}$ y las unidades de G_1 son $\frac{euros}{año}$.

El beneficio esperado es $E[Tarifa \cdot X_1] - 1000 = Tarifa \cdot E[X_1] - 1000$.

Para que el beneficio esperado sea positivo se tiene que dar que $Tarifa \cdot E[X_1] - 1000 > 0$

Es decir que

$$Tarifa \cdot \lambda > 1000$$

$$Tarifa > \frac{1000 \frac{euros}{año}}{\frac{365}{10000} \frac{averias}{año}} = 27397,6 \frac{euros}{averia}$$