Estadística

Soluciones ejercicios: Estimación

Versión 8

Emilio Letón

1. Nivel 1

1. Sea una v.a. $X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d $Ber(\theta)$. Demostrar que el estimador dado por

$$\theta^* = \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} X_i}{2+n}$$

verifica que es asintóticamente centrado y asintóticamente de varianza nula.

SOLUCIÓN:

Se tiene que

$$E[\theta^*] = E\left[\frac{1 + \sum_{i=1}^{n} X_i}{2+n}\right] = \frac{1}{2+n}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} E[X_i]\right) = \frac{1}{2+n}(1+n\theta)$$

Por lo que $\lim_{n\to\infty} E[\theta^*] = \theta$.

Por otra parte

$$V[\theta^*] = V\left[\frac{1 + \sum_{i=1}^{n} X_i}{2+n}\right] \overset{ind.}{=} \frac{1}{(2+n)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} V[X_i]\right) = \frac{1}{(2+n)^2}(n\theta(1-\theta))$$

Por lo que $\lim_{n\to\infty} V[\theta^*] = 0$.

2. Decir si es verdadera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo o su valor correcto:

"El hecho de que la media muestral sea un buen estimador de la media poblacional ya que es insesgado, significa que $E[\mu] = \mu$."

SOLUCIÓN:

Es falsa.

Lo que realmente significa es que $E\left[\overline{X}\right] = \mu$.

3. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo o su valor correcto:

   a) Si en una muestra observamos que $\overline{x} = \mu$, se dice entonces que $\overline{x}$ es insesgado o centrado.

b) La varianza muestral es un estimador insesgado de la varianza poblacional.

c) Un estimador de X es $\overline{X}$.

SOLUCIÓN:

a) Es falsa.

En una muestra nunca se sabrá si la media muestral es el verdadero valor de la media poblacional, ya que ésta es un parámetro, es decir una constante desconocida. Lo que se puede asegurar es que $E\left[\overline{X}\ \right] = \mu$ y de este último resultado, junto con el Teorema Central del Límite, deducir un intervalo de confianza para μ.

b) Es falsa.

Es la cuasivarianza muestral la que es insegada.

c) Es falsa.

Sólo se estiman parámetros y no variables aleatorias. Lo que sí es cierto es que un estimador de μ es $\overline{X}$.

4. Decir si es verdadera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo o su valor correcto:

"Si $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a.i.i.d. según $N(\mu, 1) \Rightarrow \overline{X}^2 - \frac{1}{n}$ es centrado para μ^2."

SOLUCIÓN:

Es verdadera.

Se verifica que

$$E\left[\overline{X}^2 - \frac{1}{n}\right] = E\left[\overline{X}^2\right] - \frac{1}{n} = V\left[\overline{X}\right] + E^2\left[\overline{X}\right] + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \mu^2 - \frac{1}{n} = \mu^2$$

5. Decir si es verdadera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo o su valor correcto:

"Sea $X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d., al ser $\overline{X}$ un estimador centrado para μ, se tiene que $\overline{X}^2$ es centrado para μ^2"

SOLUCIÓN:

Es falsa.

Se tiene que

$$V\left[\overline{X}\right] = E\left[\overline{X}^2\right] - E^2\left[\overline{X}\right]$$

por lo que

$$E\left[\overline{X}^2\right] = V\left[\overline{X}\right] + E^2\left[\overline{X}\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \neq \mu^2$$

y, por tanto, $\overline{X}^2$ no es centrado para μ^2 (ya que $\sigma^2 = 0$ equivale a que la v.a. es constante).

6. Decir si es verdadera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo o su valor correcto:

"Sea X v.a. con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x) & 0 < x < \theta \\ 0 & resto \end{cases}$$

entonces, se tiene que $\widehat{\theta} = \overline{X}$ es un estimador centrado para θ.''

SOLUCIÓN:

Es falsa.

Se tiene que

$$E\left[\widehat{\theta}\right] = E\left[\overline{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = E\left[X\right]$$

Dado que

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= \int_{x=0}^{\theta} x\frac{2}{\theta^2}\left(\theta - x\right)dx = \int_{x=0}^{\theta} x\frac{2}{\theta}dx - \int_{x=0}^{\theta} x^2\frac{2}{\theta^2}dx \\ &= \frac{2}{\theta}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\theta} - \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\theta} = \theta - \frac{2}{3}\theta = \frac{1}{3}\theta \end{aligned}$$

por lo que $E\left[\widehat{\theta}\right] = \frac{1}{3}\theta \neq \theta$, y por tanto $\widehat{\theta}$ no es centrado para θ ($3\widehat{\theta}$ sí lo sería).

7. Demostrar que si $\widehat{\theta}$ es un estimador de θ entonces el error cuadrático medio de $\widehat{\theta}$ es

$$ECM\left(\widehat{\theta}\right) = sesgo^2\left(\widehat{\theta}\right) + V\left(\widehat{\theta}\right)$$

SOLUCIÓN:

El error cuadrático medio ECM se define como $ECM\left(\widehat{\theta}\right) = E\left[\left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2\right]$, por tanto

$$ECM\left(\widehat{\theta}\right) = E\left[\widehat{\theta}^2 + \theta^2 - 2\theta\widehat{\theta}\right] = E\left[\widehat{\theta}^2\right] + \theta^2 - 2\theta E\left[\widehat{\theta}\right]$$

Por otra parte, el sesgo se define como $sesgo\left(\widehat{\theta}\right) = E\left[\widehat{\theta}\right] - \theta$, por tanto

$$sesgo^2\left(\widehat{\theta}\right) + V\left(\widehat{\theta}\right) = \left(E\left[\widehat{\theta}\right] - \theta\right)^2 + E\left[\widehat{\theta}^2\right] - E^2\left[\widehat{\theta}\right]$$

$$= E^2\left[\widehat{\theta}\right] + \theta^2 - 2\theta E\left[\widehat{\theta}\right] + E\left[\widehat{\theta}^2\right] - E^2\left[\widehat{\theta}\right] = E\left[\widehat{\theta}^2\right] + \theta^2 - 2\theta E\left[\widehat{\theta}\right] = ECM\left(\widehat{\theta}\right).$$