

Capítulo XV

## MATEMÁTICAS Y ECONOMÍA

POR DANIEL PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA  
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
Correo electrónico: [dpena@est-econ.uc3m.es](mailto:dpena@est-econ.uc3m.es)

mat



MATEMÁTICAS EN LA COMUNIDAD DE MADRID  
COMPUTACIÓN E INTERACCIÓN I+D+i

## Abstract

This article reviews the key role of Mathematics in the economic sciences and presents some examples of how mathematics has contributed to shape economic thought. Mathematics are used in economics to build models which describe the relationship among the economic variables, to obtain optimal policies and decisions and to forecast. Section 2 of this article discusses some of the contributions to Economic Theory from Mathematics and Mathematical economics: setting and solving equilibrium problems, the development of game theory, dynamic optimization theory, decision theory and social choice models. These areas form the core of modern economic theory and the research in these topics have been recognized by many Nobel Prizes in Economics. Section 3 discusses Statistics and Econometrics and their contribution to understand economic relationships, to model the dependency among economic variables and to build time series models for forecasting and control. Section 4 includes some concluding remarks.

## Introducción

Este trabajo resume el papel central de la Matemática en las Ciencias Económicas (que incluyen la economía propiamente dicha, pero también la administración de empresas), ilustra mediante algunos ejemplos su contribución y presenta algunos de los temas de investigación que pueden ser importantes en el futuro.

En las Ciencias económicas la matemática se utiliza para construir modelos que establezcan relaciones entre las variables de interés y permitan establecer reglas generales, comparar política alternativa y hacer predicciones. Para construir estos modelos es necesario entender las propiedades de las variables económicas y las relaciones entre ellas, formular y resolver los problemas de optimización que son el núcleo de la teoría económica, tanto estáticos como dinámicos, analizar sistemas dinámicos y sus propiedades (convergencia, estabilidad, etc.) y resolver los problemas de equilibrio que con el centro de de la teoría económica. En segundo lugar la matemática, y en particular la Estadística, se utiliza para validar estos modelos mediante los datos observados. La primera actividad corresponde al campo de la Economía Matemática y la segunda al campo de la Estadística y la Econometría. Esta clasificación puede verse también con la aplicación de la Matemática a problemas deterministas o probabilísticos. Es ilustrativo que los dos primeros premios Nobel en Economía se hayan adjudicado a representantes de estas dos líneas de trabajo: el primer año del premio, 1969, se adjudica a los estadísticos/económetras R. Fish y J. Tinbergen por su contribución al desarrollo de los modelos econométricos. El año siguiente, 1970, lo recibe P. Samuelson que aplica con éxito el Análisis matemático al desarrollo de la teoría económica.

Esta nota se estructura como sigue. En la sección 2 presentamos de forma sucinta algunos de los problemas principales abordados en la Economía matemática. En la sección 3 comentamos algunas de las contribuciones de la Estadística a la Economía. La sección 4 incluye algunos comentarios finales.

## La Economía Matemática

Un modelo económico está en equilibrio cuando las decisiones de los agentes económicos son compatibles y coherentes con sus objetivos. Por ejemplo, un mercado donde se intercambia un bien está en equilibrio si el precio es tal que la cantidad ofertada es igual a la cantidad demandada. El problema del equilibrio es pues central a la teoría económica y la teoría del equilibrio general (que se refiere a toda la economía) constituye un cuerpo teórico consolidado en el que distintas ramas de la matemática juegan un papel esencial (Debreu, 1987).

Durante la mitad del siglo XX y utilizando como herramienta matemática el teorema del punto fijo de Kakutani, se obtuvieron dos resultados fundamentales:

1. La existencia de equilibrio competitivo (walrasiano) en una economía de intercambio, resultado obtenido por K. Arrow y G. Debreu, con lo cual se resolvía la vieja conjetura de L. Walras, enunciada en la segunda mitad del siglo XIX, acerca de la bondad como mecanismo de un sistema de precios para realizar asignaciones en una economía.
2. La existencia de equilibrio (de Nash) en un juego estático no-cooperativo (es decir, donde no hay imposiciones externas) de tipo finito (es decir, cuando hay un número finito tanto de agentes como de estrategias factibles), si ampliamos el espacio de estrategias, permitiendo que los agentes puedan ocultar sus acciones eligiendo su estrategia de forma aleatoria.

En la actualidad las técnicas matemáticas son fundamentales para analizar el efecto de las políticas económicas, la evolución de la riqueza y la distribución de la renta y la variabilidad de los precios. Muchos de los fenómenos económicos se desarrollan a lo largo de un periodo de tiempo, finito o infinito, de forma que las decisiones presentes influyen notablemente en las futuras. De esta forma, se hace imprescindible utilizar las técnicas de optimización dinámica para atacar de forma eficiente dichos problemas.

Las herramientas utilizadas son la teoría de espacios métricos y de Banach, la teoría de la medida e integración, los procesos de Markov, los teoremas de punto fijo de Banach, Brower, Schauder, Kakutani y Fan, así como el cálculo de variaciones y el principio del máximo de Pontryagin. Por otra parte, para estudiar propiedades de continuidad del equilibrio con respecto a los datos iniciales (recursos y preferencias) se manejan topologías no triviales en el espacio de las características de los agentes. La programación dinámica, creada por Bellman, permite determinar soluciones robustas de los problemas de optimización, lo que permite reaccionar de forma óptima frente a desviaciones inesperadas. Esta propiedad va asociada a grandes problemas de cálculo por lo que el cálculo numérico juega un papel destacado en la resolución de estos problemas.

Aunque el concepto de equilibrio de Nash fue criticado inicialmente, en aquellos años el campo de estudio primordial era la teoría de juegos cooperativa introducida por Von Neumann, su enfoque ha sido seguido en la teoría de juegos con más aplicaciones prácticas en la economía: la teoría no cooperativa. El concepto de equilibrio de Nash ha sido refinado para juegos dinámicos



(equilibrio de Nash perfecto en subjuegos), extendiéndolo a situaciones en los que se presentan asimetrías de información para los diversos jugadores (equilibrio de Nash bayesiano) y, en general, en una nueva rama a caballo entre la teoría de juegos y la lógica matemática, el estudio del comportamiento de los agentes que no son puramente racionales.

Un tercer área de investigación importante es la teoría de la elección social. Arrow demostró la inexistencia de un mecanismo de agregación de preferencias que cumpliera ciertas condiciones “razonables”. Este resultado, conocido como teorema de la imposibilidad de Arrow, conduce al problema de determinar aquellas reglas sociales en las que deberían basarse las decisiones sociales. Este problema forma parte de otro más general, conocido como agregación de preferencias. Esencialmente, se trata de determinar las propiedades generales agregadas (propiedades macroeconómicas) de la sociedad, partiendo del comportamiento individual de cada uno de los agentes. Para modelar estas ideas se parte de una función (la función de elección social) cuyo dominio y conjunto imagen están constituidos por todas las relaciones de preferencias que podrían tener los agentes que componen la sociedad. Sobre esta función se imponen condiciones matemáticas, cuyo contenido refleja las nociones de justicia de la sociedad. Por lo general, estas propiedades determinan una forma única para la función de elección social. Fijada una sociedad particular, esta función transforma el conjunto de preferencias de los agentes que la constituyen en una única relación agregada de preferencias. Consecuentemente, las decisiones que se toman son aquellas que maximizan las preferencias agregadas por la función de elección social. Gran parte de la investigación en este área se ha dirigido a encontrar propiedades razonables de la función de elección social que no conlleven el resultado dictatorial (D. Black, A. Sen) o a encontrar otros contextos donde las conclusiones del Teorema de Arrow sigan siendo válidas (Teorema de Gibbard-Satterthwaite). Durante la década de 1990, el área de Economía Política ha experimentado un crecimiento importante. En los modelos que se consideran en este campo, los espacios tienen, de forma natural, una topología más complicada que la que aparece en Teoría de Juegos o Equilibrio General. En consecuencia, ha sido necesario recurrir a la Teoría de Puntos fijos de Lefschetz, utilizada, por ejemplo, en modelos de formación endógena de partidos.

Por último un campo reciente de investigación es el de equilibrio intertemporal en mercados financieros. En esta situación puede no existir precio de equilibrio ya que la no acotación permite oportunidades de arbitraje. A partir del trabajo de pionero de Hart en 1974 se han estudiado condiciones que limitan las oportunidades de arbitraje y que se traducen en una acotación endógena del conjunto de las estrategias. Los desarrollos en el análisis de portafolios en tiempo continuo de Black y Scholes (1973) y otros han motivado el estudio del problema de la existencia de equilibrio en economías con conjuntos de estrategias no acotados e infinitas mercancías. Se requieren ahora condiciones más fuertes que utilizan técnicas específicas del análisis funcional.

## La Estadística y la Econometría

Las relaciones entre variables que aparecen en cualquier libro de introducción a la Economía: función de producción, curva de oferta, curva de demanda, etc. se refieren a relaciones intrínsecamente estadísticas, es decir, que solamente pueden interpretarse en términos de valores espe-

rados o promedios. Por ejemplo, una función de producción relaciona el número de unidades que pueden fabricarse de un producto con los factores de producción, por ejemplo horas hombre y horas máquina, pero esta función sólo tiene sentido si se interpreta como una relación ideal que podría estimarse a partir de los datos mediante un modelo de regresión. La necesidad de contrastar empíricamente las leyes económicas impulsó el desarrollo de métodos estadísticos dando lugar a la Econometría. Aunque las herramientas básicas para relacionar variables estadísticas, los métodos de regresión, fueron desarrollados por Gauss, Galton y Pearson en el siglo XIX, su aplicación a la medición de relaciones económicas planteó nuevos problemas como consecuencia de la imposibilidad de realizar experimentos controlados de medición como en el mundo físico. Los problemas de autocorrelación, heterocedasticidad, errores en las variables, endogeneidad y otros fueron estudiados inicialmente ligados a las aplicaciones económicas, aunque luego han sido utilizados y extendidos en otras áreas de aplicación de la estadística.

Un campo de especial importancia en las aplicaciones de los modelos estocásticos a la economía es el análisis de series temporales y la predicción económica. Hasta los años 70 la mayoría de los modelos econométricos utilizados se basaban en los modelos de regresión clásicos, concebidos para situaciones estáticas. En estos años Box y Jenkins (1970) desarrollan una metodología para construir modelos lineales de series temporales, los modelos ARIMA (autoregressive integrated moving average) que suponen un avance fundamental en la modelización de series temporales en cualquier área, y, en particular, en las ciencias económicas. La aplicación de estos modelos para medir la relación entre variables económicas lleva al concepto de cointegración por el que Granger y Engle han recibido en 2003 el premio Nobel de Economía. Engle (1982), ha sido además pionero en el estudio de los modelos condicionalmente heterocedásticos (ARCH) de gran importancia en la modelización de series temporales financieras.

En el campo de la administración de empresas las herramientas estadísticas han tenido un impacto especial en el área de producción, con el desarrollo de los métodos de control de calidad; en marketing, con las aplicaciones del diseño de experimentos y de las técnicas de análisis multivariante para clasificar y segmentar a los clientes, encontrar grupos homogéneos y reducir la dimensión de grandes masas de datos; y en las finanzas y los seguros, con la modelización y gestión del riesgo, la selección de carteras y las teorías de valoración y cobertura de riesgos. Un campo aparte merecen las herramientas de Investigación Operativa, en las que no entraremos por falta de espacio y porque son objeto de otra viñeta en éste volumen.

Los problemas de investigación abiertos en la modelización estocástica en las ciencias económicas son numerosos. Las técnicas estadísticas clásicas se han desarrollado para aprovechar óptimamente una información escasa, con tamaños de muestra pequeños y medianos y con pocas variables, pero en la actualidad, cada vez con más frecuencia, se dispone de datos económicos y empresariales enormes con muchas variables. Por ejemplo, un banco de datos de los gastos con tarjetas de crédito emitidas por una entidad financiera puede incluir miles de variables y centenas de miles de observaciones que tienen además una dimensión temporal. Las técnicas estadísticas para analizar estos bancos de datos son insuficientes, ya que: (1) es previsible un alto grado de heterogeneidad, siendo la relación entre las variables distinta en distintos ele-



mentos de la muestra; y (2) el número de variables disponible puede ser muy alto e incluso mayor que el de observaciones. En estos casos los procedimientos habituales para encontrar grupos y relacionar variables son poco efectivos. Por ejemplo, construir un modelo de series temporales con cien variables es muy complejo (y en la práctica inviable) con los métodos actuales diseñados para unas pocas series. Esto ha dado lugar a un desarrollo de la estadística multivariante que se conoce también como herramientas de minería de datos (Data mining, véase Hastie *et al*, 2001). Un segundo problema es la combinación de información de distintas fuentes. La facilidad a acceder a muchos datos distintos tomados en condiciones heterogéneas ha puesto en un lugar central los llamados problemas de meta-análisis donde debemos combinar información diversa, frecuentemente con métodos Bayesianos. Un campo donde se utiliza de forma efectiva esta combinación de información es en la predicción mediante el llamado promedio Bayesiano de modelos: en lugar de seleccionar un modelo para los datos y generar predicciones con el, podemos construir muchos modelos distintos y combinar sus predicciones con pesos proporcionales a sus probabilidades a posteriori.

## Conclusiones

La Matemática ha jugado un papel central en el desarrollo de las Ciencias económicas, que la utilizan para construir sus modelos explicativos y para contrastarlos con los datos reales. Es previsible que la creciente capacidad de computación conduzca a modelos matemáticos más complejos y a métodos más sofisticados de estimación y predicción. Para ello son necesarios avances en las propias matemáticas para aportar las herramientas conceptuales y analíticas que permitan abordar estos nuevos problemas.

## Agradecimientos

La exposición sobre Economía Matemática se basa en las ideas de Carlos Hervés, Francisco Maruhenda, Carmelo Nuñez y Juan Pablo Rincón. La contribución que puede haber en esta sección es suya, y si hay errores son de mi responsabilidad. Alejandro Balbás y Diego Moreno, me han enviado también su opiniones sobre problemas abiertos de investigación que me han ayudado mucho. Quiero agradecer a estos ejemplares colegas su generosa aportación a este proyecto.

## Bibliografía

- [1] Black, F y Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.
- [2] Box, G. E. P. y Jenkins, G. (1970) *Time series Analysis, Forecasting and Control*, Holden Day.
- [3] Debreu, G. (1987) *Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium*. New Haven: Yale University Press
- [4] Engle, R. F. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, 987-1007.
- [5] Hastie, T., Tibshirani, R. y Friedman, J. (2001) *The elements of statistical learning*. Wiley