1. Una única variable X

Suponemos una muestra de observaciones independientes de la variable X :

$$\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

1.1. Si X sigue una distribución normal

Suponemos que $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

- $H_0 : \mu = \mu_0$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim_{H_0} t_{n-1}$$

- $H_0 : \sigma = \sigma_0^2$

$$\frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \sim_{H_0} \chi^2_{n-1}$$

1.2. Si X no sigue una distribución normal

Denotamos $\mu = E[X]$.

1. Si n es grande, usando el Teorema Central del Límite,

   - $H_0 : \mu = \mu_0$

   $$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \to_{H_0} N(0, 1)$$

2. Para un n cualquiera:

   a) Si X es ordinal,

   - $H_0 : Q_{0,5} = m_0$

   $$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim_{H_0} Bin(n, 0.5),$$

   donde

   $$Y_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } X_i > m_0, \\ 0, & \text{si } X_i < m_0. \end{array} \right\}$$

   b) Si X es ordinal y simétrica,

   - $H_0 : Q_{0,5} = m_0$

   $$T^+ \sim_{H_0} Wilcoxon,$$

   donde

   $$T^+ = \text{Suma de los rangos de las } X_i \text{ mayores que } m_0.$$

   c) Si X es binaria: $X \sim Bin(1, p)$,

   - $H_0 : p = p_0$

   $$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim_{H_0} Bin(n, p_0).$$

1.3. Contraste de Lilliefors para normalidad

- $H_0 : X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F_{N(\bar{x}, s)}(x) \right| \sim \Delta_n^L$$

2. Dos variables independientes X e Y.

Suponemos dos muestras independientes de observaciones de las variable X e Y :

$$\{X_1, \ldots, X_n\} \qquad \{Y_1, \ldots, Y_m\}$$

2.1. Si X e Y siguen distribuciones normales independientes

Suponemos que $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ e $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$

- $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim_{H_0} F_{n-1,m-1}$$

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
    - Si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)\, S_1^2 + (m-1)\, S_2^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim_{H_0} t_{n+m-2}$$

    - Si $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \sim_{H_0} t_f$$

    donde:

$$f = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}\right)^2}{\frac{1}{n-1}\left(\frac{S_1^2}{n}\right)^2 + \frac{1}{m-1}\left(\frac{S_2^2}{m}\right)^2}$$

2.2. Si X y/o Y no siguen una distribución normal

Denotamos $\mu_1 = E\,[X]$ y $\mu_2 = E\,[Y]$.

1. Si n y m son grandes, usando el Teorema Central del Límite,

    - $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \to_{H_0} N\,(0,1)$$

2. Si n y m son grandes,

    - $H_0 : F_X = F_Y$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} \to_{H_0} \chi^2_{k-1}$$

3. Para n y m cualesquiera y si X e Y son continuas:

    - $H_0 : F_X = F_Y$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\hat{F}_n\,(x) - \hat{G}_n\,(x)\right| \sim \Delta_{n,m}$$

    - $H_0 : F_X = F_Y$

$$U \sim_{H_0} Mann\text{-}Witney\text{-}Wilcoxon$$

    donde

$$U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} I\,(X_i < Y_j)$$

3. Dos variables emparejadas (X, Y).

Suponemos una muestras bivariante observaciones de la variable (X, Y) :

$$\left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \right\}.$$

Podemos construir una muestra univariante de la variable $D = X - Y$:

$$\{D_1, \ldots, D_n\},$$

donde $D_i = X_i - Y_i$.

3.1. Si D sigue una distribución normal

- $\{H_0 : \mu_X = \mu_Y\} \Leftrightarrow \{H_0 : \mu_D = 0\}$

$$\frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim_{H_0} t_{n-1}$$

3.2. Si D no sigue una distribución normal

1. Si n es grande, usando el Teorema Central del Límite,

   - $\{H_0 : \mu_X = \mu_Y\} \Leftrightarrow \{H_0 : \mu_D = 0\}$

   $$\frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \to_{H_0} N(0, 1)$$

2. Para un n cualquiera:

   a) Si D es ordinal,

   - $\left\{H_0 : Q^X_{0,5} = Q^Y_{0,5}\right\} \Leftrightarrow \left\{H_0 : Q^D_{0,5} = 0\right\}$

   $$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim_{H_0} Bin(n, 0.5),$$

   donde

   $$Y_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } D_i > 0, \\ 0, & \text{si } D_i < 0. \end{array} \right\}$$

   b) Si D es ordinal y simétrica,

   - $\left\{H_0 : Q^X_{0,5} = Q^Y_{0,5}\right\} \Leftrightarrow \left\{H_0 : Q^D_{0,5} = 0\right\}$

   $$T^+ \sim_{H_0} Wilcoxon,$$

   donde

   $$T^+ = \text{Suma de los rangos de las } D_i \text{ mayores que } 0.$$

3.3. Si (X, Y) sigue una normal bivariante

Suponemos que:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

- $\left\{H_0 : F_{(X,Y)} = F_X F_Y\right\} \Leftrightarrow \{H_0 : \rho = 0\}$

$$\hat{\rho}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}} \sim_{H_0} t_{n-2}$$

donde

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}}$$

3.4. Si (X, Y) no sigue una normal bivariante

1. Si n es grande,

    - $\{H_0 : \rho = 0\}$

    $$\hat{\rho}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}} \to_{H_0} N(0,1)$$

    - $H_0 : F_{(X,Y)} = F_X F_Y$

    $$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} \to_{H_0} \chi^2_{(k-1)(r-1)}$$

2. Para n cualquiera y si X e Y son ordinales.

    - $H_0 : F_{(X,Y)} = F_X F_Y$

    $$\hat{\rho}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i S_i - n\bar{R}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_i^2 - n\bar{R}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_i^2 - n\bar{S}^2}}$$

    $$\sum_{i=1}^{n} \left(R_i - S_i\right)^2 \sim Spearman$$

    - $H_0 : F_{(X,Y)} = F_X F_Y$

    $$\hat{\tau} = \frac{n_c - n_d}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

    $$n_c = \text{n}^o \text{ pares concordantes} \sim Kendall$$