Ejercicios: 2$^{\text{do}}$ Parcial

1. Sea $(M_n)_{n\geq 0}$ una martingala y T un tiempo de parada. Asumiendo que una de las siguientes condiciones se cumpla:

   I) $T \leq N$ por algún $N > 0$;

   II) $T < \infty$ y $|M_{n\wedge T}| \leq C$.

   Demuestra que:
$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0] \ .$$

(3 Puntos)

2. Sea $B(t) = \mu t + \sigma W(t)$ un movimiento Browniano con deriva μ y volatilidad σ, $W(t)$ denota un movimiento Browniano estándar, y sea
$$p(x, t; y) = \partial_x \mathbb{P}(B(t) \leq x - y)$$
   demuestra que vale la Backward Diffusion Equation:
$$\partial_t p(x, t; y) = \mu\, \partial_y p(x, t; y) + \frac{1}{2}\sigma^2\, \partial^2_{y^2} p(x, t; y)$$

(3 Puntos)

3. Considera la cadena de Markov con estados $\{1, 2, 3, 4\}$ y generador
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
   Calcula:

   a) La probabilidad de visitar el estado 3 empezando en 1.

   a) El tiempo medio que tarda la cadena para visitar el estado 2 empezando en 1.

(2 Puntos)

4. Calcula la integral estocástica
$$\int_0^t u\, B(u)\, dB(u)$$
   con $B(t) = \mu t + \sigma W(t)$ donde $W(t)$ es un movimiento Browniano estándar. *(2 Puntos)*