Ejercicios: 1$^{\text{er}}$ Parcial

1. Indica con γ_i^k el número medio de visitas al estado i durante una excursión que empieza y termina (sin contar el paso final) en el estado k. Asumiendo que $\mathbf{P}$ sea la matriz de transición de una cadena irreducible y recurrente, muestra que:

   a) $0 < \gamma_i^k < \infty$ y $\gamma_k^k = 1$.

   b) el vector γ^k es una medida invariante para $\mathbf{P}$.

   c) cualquier otra medida invariante λ con $\lambda_k = 1$ cumple con la condición $\lambda \geq \gamma^k$.

   (6 Puntos)

2. Considera la cadena de Markov con estados $\{0, 1, 2, \ldots\}$ con probabilidades de transición dadas por

$$\begin{array}{ll} p_{00} = p_{10} = p_{i,i-1} = 1/4 & i \geq 2 \\ p_{01} = p_{11} = p_{i,i+1} = 3/4 & i \geq 2 \end{array}$$

   Asume que la cadena empiece en 3 en el tiempo 0.

   a) Encuentra la probabilidad de visitar el estado 0.

   b) Calcular la distribución limite de la cadena condicionada a que visite el estado 0 en un tiempo finito.

   c) Calcular el $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, para $i, j \geq 0$.

   (4 Puntos)