# Tema 2: Programación Lineal

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 82 - INGENIERÍA INFORMÁTICA

20 de Octubre 2008

# Ejercicio

JN2

Se pide que formules el siguiente problema de programación lineal: Tienes 2200 euros disponibles para invertirlos durante los próximos cinco años. Al inicio de cada año puedes invertir parte del dinero en depósitos a un año o a dos años. Los depósitos a un año pagan un interés del 5%, mientras que los depósitos a dos años pagan un 11% al final de los dos años. Además, al inicio del segundo año es posible invertir dinero en obligaciones a tres años de la empresa X., que tienen un rendimiento (total) del 17%. Plantea el problema lineal correspondiente a conseguir que al cabo de los cinco años tu capital sea lo mayor posible.

# SOLUCIÓN

$$\min x_{60}$$

Las restricciones del problema serán:

- Las cantidades disponibles para invertir al inicio de cada periodo deben igualar a las inversiones en el periodo:

$$\begin{aligned}
2200 &= x_{10} + x_{11} + x_{21} \\
x_{10} + 1.05x_{11} &= x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \\
x_{20} + 1.05x_{21} + 1.11x_{12} &= x_{30} + x_{31} + x_{32} \\
x_{30} + 1.05x_{31} + 1.11x_{22} &= x_{40} + x_{41} + x_{42} \\
x_{40} + 1.05x_{41} + 1.11x_{32} + 1.17x_{23} &= x_{50} + x_{51} \\
x_{50} + 1.05x_{51} + 1.11x_{42} &= x_{60}
\end{aligned}$$

  En las expresiones anteriores, los lados izquierdos son las cantidades de dinero disponibles, y los lados derechos las inversiones al comienzo de cada año.

- No negatividad de las inversiones:

$$x_{ti} \geq 0.$$

# Ejercicio

JN3 - 1/2

Una compañía quiere construir un gran dique en un área lejana. Para su construcción necesita mezclar el hormigón en el lugar de construcción del dique, pero dicho hormigón se tiene que producir en cuatro lugares lejanos al del dique. El hormigón se produce a partir de la mezcla de distintos materiales (grava, arena, etc.). La siguiente tabla muestra las cantidades máximas disponibles para cada material y los costes de transporte de cada origen de producción del material al área del dique.

| Tipo de material | Cantidad disponible ($m^3$) | Coste de transporte (€$/m^3$) |
|---|---|---|
| $A$ | 8000 | 5.2 |
| $B$ | 16000 | 7.5 |
| $C$ | 9000 | 3.9 |
| $D$ | 6000 | 5.1 |

Para la construcción del dique se requieren 2 tipos de hormigón que se producirán con distintas mezclas de los cuatro materiales con los siguientes requisitos:

- **Mezcla 1**: como mucho puede contener un $50\%$ de ingredientes de $A$ y $B$ a la vez; al menos tiene que contener un $10\%$ de ingredientes de $C$; Los ingredientes de $A$, $B$, $C$ y $D$ deben suponer al menos el $98\%$ de la mezcla.
- **Mezcla 2**: el ingrediente $A$ debe estar presente en al menos el $20\%$ de la mezcla; $C$ y $D$ deben suponer al menos la mitad de $A$ y $B$; Los ingredientes de $A$, $B$, $C$ y $D$ deben suponer al menos el $99\%$ de la mezcla.

# Ejercicio

JN3 - 2/2

La siguiente tabla muestra los costes de cada mezcla y las cantidades mínimas requeridas.

| Tipo de hormigón | Coste de la mezcla (€$/m^3$) | Cantidad mínima necesitada ($m^3$) |
|---|---|---|
| **Mezcla 1** | $5.7$ | $9000$ |
| **Mezcla 2** | $6.3$ | $15000$ |

El objetivo de la compañía es producir la cantidad necesaria de hormigón con el menor coste posible.

Formula, pero no resuelvas, un problema de programación lineal apropiado para que la compañía tome una decisión. Explica claramente el significado de cada variable que introduzcas en la formulación.

# Solución

$x_{A1}$ denota la cantidad (en $m^3$) de material $A$ usado en la **Mezcla 1**, ..., $x_{D2}$ denota la cantidad (en $m^3$) de material $D$ usado en la **Mezcla 2**. Además, $y_1$ denotará la cantidad (en $m^3$) de hormigón producido por la **Mezcla 1** e $y_2$ denotará la cantidad (en $m^3$) de hormigón producido por la **Mezcla 2**.
El problema a resolver será:

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & 5.2(x_{A1}+x_{A2})+7.5(x_{B1}+x_{B2}) & +5.7y_1+6.3y_2 \\
 & +3.9(x_{C1}+x_{C2})+5.1(x_{D1}+x_{D2}) & \\
 & & \\
\text{sujeto a} & x_{A1}+x_{A2}\leq 8000 & x_{B1}+x_{B2}\leq 16000 \\
 & x_{C1}+x_{C2}\leq 9000 & x_{D1}+x_{D2}\leq 6000 \\
 & y_1\geq 9000 & y_2\geq 15000 \\
 & x_{A1}+x_{B1}-0.5y_1\leq 0 & x_{C1}-0.1y_1\geq 0 \\
 & x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}+x_{D1}-y_1\leq 0 & x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}+x_{D1}-0.98y_1\geq 0 \\
 & x_{A2}-0.2y_2\geq 0 & x_{C2}+x_{D2}-0.5(x_{A2}+x_{B2})\geq 0 \\
 & x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{D2}-y_2\leq 0 & x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{D2}-0.99y_2\geq 0 \\
 & x_{A1},\ldots,x_{D2},y_1,y_2\geq 0 &
\end{array}
$$

# Ejercicio

JN11

Nos dan el problema lineal

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a} & 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

y el punto $x = (2 \quad 1 \quad 0)^T$. Se pide que:

1. Justifiques que el punto anterior es un vértice.
2. Encuentres el vértice solución.
3. Determines todos los vértices adyacentes al vértice solución.
4. ¿Tiene más de una solución el problema? Indica todas las soluciones que puedas.