Ejercicios de Vectores Aleatorios

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO MAGISTRAL

GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS AUDIOVISUALES

Otros

Ejercicio

M2

Calcular la función de densidad conjunta y las marginales correspondientes a la siguiente función de distribución conjunta,

$$F(x,y) = (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta y}),$$

con $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Ejercicio

M2

Calcular la función de densidad conjunta y las marginales correspondientes a la siguiente función de distribución conjunta,

$$F(x,y) = (1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta y}),$$

con $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

SOLUCIÓN:

$$f(x,y) = \alpha\,\beta\,e^{-\alpha\,x-\beta\,y}$$
$$f_X(x) = \alpha\,e^{-\alpha\,x}$$
$$f_Y(y) = \beta\,e^{-\beta\,y}$$

Ejercicio

M5

El tiempo total (en horas) que permanece un cliente en un determinado restaurante se divide en:
$Y_1 =$ tiempo de espera hasta que se sirve el primer plato;
$Y_2 =$ tiempo desde ese momento hasta que el cliente sale del restaurante (es decir, tiempo de comer y pagar).
Las variables aleatorias Y_1 e Y_2 tienen distribución conjunta dada por:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-(y_1+y_2)}, & 0 \leq y_1, y_2 \leq \infty; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Calcular:

a) La probabilidad de que el cliente pase más de una hora en el restaurante;

b) Las distribuciones marginales de Y_1 e Y_2.

c) La probabilidad de que un cliente tarde en ser servido más de una hora.

Ejercicio

M5

El tiempo total (en horas) que permanece un cliente en un determinado restaurante se divide en:
$Y_1 =$ tiempo de espera hasta que se sirve el primer plato;
$Y_2 =$ tiempo desde ese momento hasta que el cliente sale del restaurante (es decir, tiempo de comer y pagar).
Las variables aleatorias Y_1 e Y_2 tienen distribución conjunta dada por:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-(y_1+y_2)}, & 0 \leq y_1, y_2 \leq \infty; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Calcular:

a) La probabilidad de que el cliente pase más de una hora en el restaurante;
b) Las distribuciones marginales de Y_1 e Y_2.
c) La probabilidad de que un cliente tarde en ser servido más de una hora.

Solución:

a) $\Pr(Y_1 + Y_2 > 1) = 2/e$;
b) $f_{Y_1}(y_1) = e^{-y_1} \quad y_1 \geq 0$ y $f_{Y_2}(y_2) = e^{-y_2} \quad y_2 \geq 0$;
c) $\Pr(Y_1 > 1) = 1/e$.

Ejercicio

M4

Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido uniformemente en el cuadrado de vértices $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$, es decir, la función de densidad conjunta es:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $X^2 + Y^2 < 1$;

b) $2X - Y > 0$;

c) $|X + Y| < 2$.

Ejercicio

M4

Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido uniformemente en el cuadrado de vértices $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$, es decir, la función de densidad conjunta es:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $X^2 + Y^2 < 1$;

b) $2X - Y > 0$;

c) $|X + Y| < 2$.

Solución:

a) $\Pr(X^2 + Y^2 < 1) = 1/4$;

b) $\Pr(2X - Y > 0) = 1/2$;

c) $\Pr(|X + Y| < 2) = 1$.

Ejercicio

M8

La variable aleatoria bivariante (X, Y) está definida en el rectángulo $OBCD$.

$$O = (0, 0) \quad B = (1, 0) \quad C = (1, 2) \quad D = (0, 2).$$

con función de densidad

$$f(x, y) = k y^2.$$

a) Determinar el valor de k;
b) Calcular las densidades marginales;
c) Calcular las densidades condicionadas $f(x|y)$, $f(y|x)$;
d) ¿Son X e Y independientes?
e) Calcular $\Pr(Y - 2X < 0)$.

Ejercicio

M8

La variable aleatoria bivariante (X, Y) está definida en el rectángulo $OBCD$.

$$O = (0, 0) \quad B = (1, 0) \quad C = (1, 2) \quad D = (0, 2).$$

con función de densidad

$$f(x, y) = k y^2.$$

a) Determinar el valor de k;
b) Calcular las densidades marginales;
c) Calcular las densidades condicionadas $f(x|y)$, $f(y|x)$;
d) ¿Son X e Y independientes?
e) Calcular $\Pr(Y - 2X < 0)$.

Solución:

a) $k = 3/8$;
b) $f_X(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$ y $f_Y(y) = \frac{3}{8}y^2 \quad 0 \leq y \leq 2$;
c) $f(x|y) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$ y $f(y|x) = \frac{3}{8}y^2 \quad 0 \leq y \leq 2$;
d) $f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) \Rightarrow$ son independientes;
e) $\Pr(Y < 2X) = 1/4$.

Ejercicio

M10

Dado el vector aleatorio bidimensional (X, Y), cuya función de densidad es

$$f(x, y) = 24y(1 - x - y).$$

en el triángulo limitado por los ejes y la recta $x + y = 1$, y cero en otro caso. Hallar el valor de $\mathbb{E}[Y|X]$.

Ejercicio

M10

Dado el vector aleatorio bidimensional (X, Y), cuya función de densidad es

$$f(x, y) = 24y(1 - x - y).$$

en el triángulo limitado por los ejes y la recta $x + y = 1$, y cero en otro caso.
Hallar el valor de $\mathbb{E}[Y|X]$.

Solución:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 24y(1 - x - y)\,dy = 4(1 - x)^3 \quad 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{24y(1 - x - y)}{4(1 - x)^3} = 6y\frac{1 - x - y}{(1 - x)^3} \quad 0 < y < 1 - x$$

$$\mathbb{E}[Y|X] = \int_0^{1-x} y\left(6y\frac{1 - x - y}{(1 - x)^3}\right) dy = \frac{6}{(1 - x)^3}\int_0^{1-x} y^2(1 - x - y)\,dy = \frac{1 - x}{2}$$

Ejercicio

M10

Si sabe que una Laplace $\mathrm{Lap}(\lambda)$ verifica que es igual a la diferencia de dos exponenciales independientes de igual parámetro λ, dar el pseudocódigo para generar una $\mathrm{Lap}(\lambda = 3)$.

Ejercicio

M10

Si sabe que una Laplace $\mathrm{Lap}(\lambda)$ verifica que es igual a la diferencia de dos exponenciales independientes de igual parámetro λ, dar el pseudocódigo para generar una $\mathrm{Lap}(\lambda = 3)$.

SOLUCIÓN:

Hay que recordar que para generar una $\mathrm{Exp}(\lambda)$ hay que utilizar el método de la inversa que proporciona en este caso que si $U \sim U(0, 1)$ entonces

$$-\frac{1}{\lambda}\log(1 - U) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Por lo tanto el pseudocódigo para generar una $\mathrm{Lap}(\lambda = 3)$ es:

- Generar $u1$ (según una $U(0, 1)$).
- Generar $exp1$ (con la expresión $-\frac{1}{\lambda}\log(1 - u1)$)
- Generar $u2$ (según una $U(0, 1)$).
- Generar $exp2$ (con la expresión $-\frac{1}{\lambda}\log(1 - u2)$)
- Generar lap a través de la expresión $exp1 - exp2$.

SOLUCIÓN TEÓRICA: 1/2

Usando la transformaciones de vectores aleatorios con

$$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda) \text{ y } X_2 \sim \text{Exp}(\lambda),\ X_1 \perp X_2 \text{ y}$$

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2) \text{ y } \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = (X_1 - X_2, X_2)$$

se obtiene que

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(y_1 + 2y_2)}$$

en el recinto $y_2 > \max\{0, -y_1\}$. Calculando la densidad marginal $L = Y_1 \sim \text{Lap}(\lambda)$

$$f_L(l) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|l|} \quad l \in \mathbb{R},$$

y la función de distribución marginal es igual a

$$F_L(l) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda l}}{2}, & l < 0; \\ 1 - \frac{e^{-\lambda l}}{2}, & l \geq 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN TEÓRICA: 2/2

Para generar una $\mathrm{Lap}(\lambda)$ podemos generar una $U \sim U(0,1)$ y luego transformarla según la transformación

$$L = F_L^{-1}(U)$$

donde

$$F_L^{-1}(u) = \begin{cases} +\frac{1}{\lambda}\log(2u), & u < 1/2; \\ -\frac{1}{\lambda}\log(2-2u), & u \geq 1/2. \end{cases}$$

por lo tanto el código para generar un valor distribuido según L será

```
u=rand(1,1);
l=(u<.5)*log(2*u)/3-(u>=.5)*log(2-2*u)/3
```

COMPARAR LAS DOS SOLUCIONES:

CÓDIGO 1

```
u=rand(10000,2);
x=-log(1-u)/3*[1;-1];
hist(x)
```

CÓDIGO 2

```
w=rand(10000,1);
l=(w<.5).*(log(2*w)/3)-(w>=.5).*(log(2-2*w)/3);
hist(l)
```

Ejercicio

SEP2007 ING. TEL. (P1)

Sea X v.a. con función de densidad Laplace, $\mathrm{Lap}(\lambda)$, con $f(x)$ dada por

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

a) Determinar λ para que $f(x)$ sea efectivamente función de densidad.

b) Determinar $F(x)$ y comprobar que cumple las cuatro propiedades de una función de distribución ($F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, monótona no decreciente y continua por la derecha).

c) Calcular $\Pr(X \geq 0)$.

d) Determinar la media, la mediana y la moda.

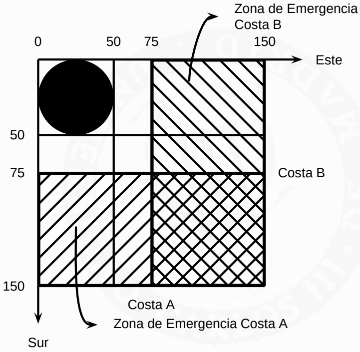
e) Si X_1,X_2 v.a.i.i.d.$\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ y se define $Y = X1 - X2$, ¿qué modelo teórico sigue la v.a. Y ? ¿Es la función idénticamente nula?

f) Basándose en apartados anteriores, dar en pseudocódigo MATLAB un algoritmo para generar $\mathrm{Lap}(\lambda = 3)$.

Ejercicio

TELECO.FEB.2004.P1

Una mancha de fuel debida a un vertido se encuentra en la situación mostrada en la figura. El avance diario de la mancha en dirección Este viene caracterizado por una $N(20\text{km}, 5\text{km})$, mientras que el avance diario en dirección Sur viene caracterizado por una $N(26\text{km}, 10\text{km})$.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo de tres días la mancha haya alcanzado la costa A?

Si tomamos la v.a. bidimensional Normal formada por los avances en ambas direcciones y con coeficiente de correlación ρ,

b) Considerando $\rho = 0$, ¿cuál es la probabilidad de que en un día la mancha haya llegado la zona de emergencia de las dos costas?

c) Considerando $\rho = 0.25$, ¿cuál es la probabilidad de que en un día la mancha esté más cerca de la costa A que de la costa B?

SOLUCIÓN TEÓRICA: 1/2

a)

X	:	Avance en dirección Este en un día	$X \sim \mathrm{N}(20, 5)$
Y	:	Avance en dirección Sur en un día	$Y \sim \mathrm{N}(26, 10)$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 \sim \mathrm{N}(3 \times 26, \sqrt{300}) = \mathrm{N}(78, 17.32)$$

$$\begin{aligned}\Pr(Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 100) &= \Pr(Z \geq (100 - 78)/17.32) \\ &= 1 - \Pr(Z < 1.27) = 1 - 0.898 = 0.102.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 25, Y \geq 25) &= \Pr(X \geq 25) \Pr(Y \geq 25) \\ &= \Pr(Z \geq (25 - 20)/5) \Pr(Z \geq (25 - 26)/10) \\ &= (1 - \Pr(Z < 1))(1 - \Pr(Z < -0.1)) \\ &= (1 - 0.8413) \Pr(Z < 0.1) = 0.1587 \times 0.5398 = 0.0856.\end{aligned}$$

SOLUCIÓN TEÓRICA: 2/2

c)

$$\begin{aligned}
\Pr(X < Y) &= \Pr(M = X - Y < 0) \\
\mathbb{E}[M] &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 20 - 26 = -6 \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[M] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] - 2\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] - 2\rho\,\sigma_X\sigma_Y \\
&= 5^2 + 10^2 - 2 \times 0.25 \times 5 \times 10 = 100 \\
\Pr(M < 0) &= \Pr(Z < (0+6)/10) = \Pr(Z < 0.6) = 0.7257.
\end{aligned}$$

Ejercicio

M9

Sean X e Y dos variables aleatorias con varianzas

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = 2 \text{ y } \mathbb{V}\text{ar}[Y] = 4$$

y covarianza

$$\mathbb{C}\text{ov}[X, Y] = -2.$$

Hallar la varianza de la variable aleatoria $Z = 3X - 4Y + 8$.

Ejercicio

M9

Sean X e Y dos variables aleatorias con varianzas

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 2 \text{ y } \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] = 4$$

y covarianza

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = -2.$$

Hallar la varianza de la variable aleatoria $Z = 3X - 4Y + 8$.

SOLUCIÓN:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = 9\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + 16\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] - 12\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = 9 \times 2 + 16 \times 4 - 12 \times (-2) = 106$$

Ejercicio

SEP2006 ING. TEL. (C2)

Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial con media 1.
Se definen las variables aleatorias U y V como:

$$U = X/(X+Y),$$
$$V = X + Y.$$

Encuentra la función de densidad conjunta de U y V.

Ejercicio

SEP2006 ING. TEL. (C2)

Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial con media 1.
Se definen las variables aleatorias U y V como:

$$U = X/(X+Y),$$
$$V = X+Y.$$

Encuentra la función de densidad conjunta de U y V.

SOLUCIÓN:

$$f_{(U,V)}(u,v) = v\,e^{-v} \quad 0 < u < 1,\ v > 0$$

Ejercicio

CPC4A_92_0607(C2)

Sea (X, Y) v.a. bidimensional continuo con X e Y independientes y sea

$$U = \ln X \text{ y } V = \ln Y$$

a) Calcular la función de densidad conjunta $f_{U,V}(u, v)$.

b) Determinar las funciones de densidad marginales.

c) ¿Son U y V independientes? ¿Son incorreladas?

Ejercicio

CPC4A_92_0607(C2)

Sea (X, Y) v.a. bidimensional continuo con X e Y independientes y sea

$$U = \ln X \text{ y } V = \ln Y$$

a) Calcular la función de densidad conjunta $f_{U,V}(u, v)$.
b) Determinar las funciones de densidad marginales.
c) ¿Son U y V independientes? ¿Son incorreladas?

Solución:

a) $f_{U,V}(u, v) = f_X(e^u)\, e^u\, f_Y(e^v)\, e^v$.
b) $f_U(u) = f_X(e^u)\, e^u$ y $f_V(v) = f_Y(e^v)\, e^v$.
c) U y V son independientes y por tanto también incorreladas.