Ejercicios de Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO MAGISTRAL

GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS AUDIOVISUALES

Otros

Ejemplo

Considerar la oscilación aleatoria

$$X(t) = \cos(2\pi f\, t + B\, \Phi),$$

donde f es una constante real, Φ es una variable aleatoria uniforme en $[-\pi/2, \pi/2]$, y B es una variable aleatoria discreta, independiente de Φ, tal que $\Pr(B = 0) = p$ y $\Pr(B = 1) = q$.
Definir y calcular la esperanza de la variable aleatoria $X(t)$.

Ejemplo

Considerar la oscilación aleatoria

$$X(t) = \cos(2\pi f\, t + B\,\Phi),$$

donde f es una constante real, Φ es una variable aleatoria uniforme en $[-\pi/2, \pi/2]$, y B es una variable aleatoria discreta, independiente de Φ, tal que $\Pr(B = 0) = p$ y $\Pr(B = 1) = q$.
Definir y calcular la esperanza de la variable aleatoria $X(t)$.

SOLUCIÓN:

$$\mu_x(t) = \left(p + q\frac{2}{\pi}\right)\cos(2\pi f\, t)$$

Ejercicio

A partir de los procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ incorrelados y de media cero, con funciones de autocorrelación $R_X(t_1,t_2)$ y $R_Y(t_1,t_2)$ respectivamente, se forma el proceso

$$Z(t) = X(t) + t\,Y(t).$$

a) Calcular la función de autocorrelación de $Z(t)$.

b) El proceso formado, ¿es estacionario en sentido débil?

SOLUCIÓN:

a) *Calcular la función de correlación de* $Z(t)$

La función de autocorrelación de $X(t)$ es $R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$ y análogamente para $Y(t)$. Además, por tratarse de procesos incorrelados,

$$C_{XY}(t_1,t_2) = 0$$

o, de forma equivalente,

$$\mathbb{E}[X(t_i)Y(t_j)] = \mu_X(t_i)\mu_Y(t_j) = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R_Z(t_1,t_2) &= \mathbb{E}[Z(t_1)Z(t_2)] = \mathbb{E}[(X(t_1)+Y(t_1)t_1)(X(t_2)+Y(t_2)t_2)] \\ &= R_X(t_1,t_2) + t_1 t_2 R_Y(t_1,t_2) \end{aligned}$$

b) *El proceso formado, ¿es estacionario en sentido débil?.*

La media es independiente del tiempo porque es nula pero la correlación no depende solamente de la distancia entre dos tiempos considerados. Por tanto, el proceso **NO** es estacionario en sentido débil.

Ejercicio

TEL.TEC.SEP.2006.C3

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias continuas, independientes, de media nula y varianza uno. Sea $X(n)$ el proceso estocástico discreto en el tiempo definido por

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ con } n = 1, 2, \ldots$$

y sea

$$Y(n) = X(n+N) - X(n) \text{ con } N \text{ constante}$$

a) Calcular la media y la autocorrelación de $X(n)$.

b) ¿Es $X(n)$ estacionario en sentido débil?

c) Obtener la función de densidad de primer orden de $Y(n)$ suponiendo N grande.

a) *Calcular la media y la autocorrelación de $X(n)$.*

La media de $X(n)$ viene dada por

$$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = 0$$

que no depende de n. La autocorrelación de $X(n)$ por

$$R_X(n_1,n_2) = \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k_1=1}^{n_1} X_{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=1}^{n_2} X_{k_2}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}[(X_1+\ldots+X_{n_1})(X_1+\ldots+X_{n_2})] = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} \mathbb{E}[X_{k_1}X_{k_2}] = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} w_{k_1k_2}$$

$$w_{k_1k_2} = \begin{cases} \mathbb{E}[X_k^2] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_k^2] + (\mathbb{E}[X_k])^2 = 1, & k_1 = k_2 = k; \\ 0, & k_1 \neq k_2. \end{cases}$$

con lo que

$$R_X(n_1,n_2) = \min(n_1,n_2)$$

que no es función de $m = n_2 - n_1$.

SOLUCIÓN: 2/2

b) *¿Es $X(n)$ estacionario en sentido débil?*

$X(n)$ **NO** es estacionario en sentido débil, porque no cumple simultáneamente que la función media no dependa de n y que a la vez la función de la autocorrelación sólo dependa de $m = n_2 - n_1$.

c) *Obtener la función de densidad de primer orden de $Y(n)$ suponiendo N grande.*

Dado que $Y(n) = X(n+N) - X(n) = \sum_{k=1}^{n+N} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=n+1}^{n+N} X_k$, por el Teorema Central del Límite se tiene que para N grande

$$Y(n) \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$$

siendo

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{n+N} X_k\right] = \mathbb{E}[X_{n+1}] + \ldots + \mathbb{E}[X_{n+N}] = 0 + \ldots + 0 = 0$$

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y(n)] = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\sum_{k=n+1}^{n+N} X_k\right] \stackrel{ind}{=} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{n+1}] + \ldots + \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{n+N}] = 1 + \ldots + 1 = N$$

Por tanto la función de densidad de primer orden de $Y(n)$ suponiendo N grande es

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2nN}} \exp\left(-\frac{1}{2N} y^2\right).$$

Problema vector discreto

En un sistema de comunicación se utiliza la siguiente señal aleatoria

$$Y(t) = A\sin(\omega t + \Phi) + B$$

donde $\Phi \sim \mathrm{U}[0, 2\pi]$ y la función de masa del vector aleatorio (A, B) es

$$\Pr(A = a, B = b) = \frac{a}{20} \quad a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{1, \ldots, a+1\}.$$

Calcula:

a) La media del proceso $Y(t)$

b) La autocorrelación del proceso $Y(t)$

c) Calcula la estacionariedad débil y la ergodicidad del proceso.

Solución: a)

Las funciones de masas marginales de A y B son iguales a

$$P(A=a)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & a=1;\\ \frac{3}{10}, & a=2;\\ \frac{6}{10}, & a=3.\end{cases}\qquad P(B=b)=\begin{cases}\frac{3}{10}, & b=1;\\ \frac{3}{10}, & b=2;\\ \frac{1}{4}, & b=3;\\ \frac{3}{20}, & b=4.\end{cases}$$

a) *La media del proceso $Y(t)$.*

$$\begin{aligned}\mu_Y(t)=\mathbb{E}[Y(t)] &= \mathbb{E}[A\sin(\omega t+\Phi)+B]\\ &= \mathbb{E}[A]\,\mathbb{E}[\sin(\omega t+\Phi)]+\mathbb{E}[B]\\ &= \mathbb{E}[B]=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

SOLUCIÓN: **b)**

b) *La autocorrelación del proceso* $Y(t)$.

$$
\begin{aligned}
R_Y(t,t+\tau) &= \mathbb{E}[(A\sin(\omega t+\Phi)+B)(A\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)+B]\\
&= \mathbb{E}[A^2\sin(\omega t+\Phi)\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)]+\mathbb{E}[B^2]\\
&\quad +\mathbb{E}[AB\sin(\omega t+\Phi)]+\mathbb{E}[AB\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)]\\
&\overset{ind}{=} \mathbb{E}[A^2]\,\mathbb{E}[\sin(\omega t+\Phi)\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)]+\mathbb{E}[B^2]\\
&\quad +\mathbb{E}[AB]\,\mathbb{E}[\sin(\omega t+\Phi)]+\mathbb{E}[AB]\,\mathbb{E}[\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)]\\
&= \mathbb{E}[A^2]\frac{\cos(\tau\omega)}{2}+\mathbb{E}[B^2]\\
&= \frac{67}{20}\cos(\tau\omega)+\frac{123}{20}.
\end{aligned}
$$

SOLUCIÓN: **c)**

c) *Calcula la estacionariedad débil y la ergodicidad del proceso.*

El proceso es estacionario en el sentido débil pero no es ergódico. De hecho

$$\mu_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y(t)dt = B;$$
$$R_T(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y(t)Y(t+\tau)d\tau = \frac{A^2}{2}\cos(\tau\omega) + B^2.$$

que quiere decir que la media temporal y la autocorrelación temporal son variables aleatorias y no constantes.