Ejercicios de Probabilidad

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO MAGISTRAL

GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS AUDIOVISUALES

Otros

Ejercicio

Se tiran dos dados, uno detrás de otro y se recogen las puntuaciones.

- Escribe el espacio muestral
- Escribe los elementos que constituyen estos sucesos:
  - A = la suma de los dos valores es por lo menos 5,
  - B = el valor del primer dado es mayor que el segundo,
  - C = el valor del primer dado es 4.
- Escribe los elementos que constituyen estos sucesos
  - $A \cap C$,
  - $B \cup C$,
  - $A \cap (B \cup C)$.

Ejercicio

Dibujar en un gráfico los sucesos A y B..

- Marcar el suceso contrario de $A \cap B$. En otra figura marcar el suceso $\bar{A} \cup \bar{B}$. Qué relación hay entre ellos?
- Marcar el suceso $A \cup B$. En otra figura marcar el suceso $\bar{A} \cap \bar{B}$. Qué relación hay entre ellos?

Ejercicio - Ing. Técnica Teleco Junio 2007 - C1a

Tres máquinas A, B y C producen respectivamente en un día 60, 30 y 10 piezas iguales.
Las probabilidades de producir piezas defectuosas para cada máquina son 0.10, 0.20 y 0.40 respectivamente.
La producción es mezclada al final del día, y de ella se saca al azar una pieza que resulta correcta.

¿Cuál es la probabilidad de que dicha pieza haya sido producida por la primera máquina?

Solución

Definimos los sucesos: c = "La pieza es correcta" d = "La pieza es defectuosa" En términos de probabilidad lo que se nos pide es calcular $\Pr(A|c)$, por tanto, del teorema de Bayes se tiene que:

$$\Pr\{A|c\} = \frac{\Pr\{A \cap c\}}{\Pr\{c\}}$$

De los datos del enunciado se deduce que:
$\Pr\{c|A\} = 1 - \Pr\{d|A\} = 1 - 0.10 = 0.90$ y que $\Pr\{A\} = 60/100 = 0.60$.
Por tanto, nos resta obtener $\Pr\{c\}$ para ello utilizamos el teorema de la probabilidad total con respecto al suceso c:

$$\begin{aligned} \Pr\{c\} &= \Pr\{c|A\}\Pr\{A\} + \Pr\{c|B\}\Pr\{B\} + \Pr\{c|C\}\Pr\{C\} \\ &= (0.9 \times 0,6) + (0.8 \times 0.3) + (0.6 \times 0.1) = 84\% \end{aligned}$$

Se concluye entonces que:

$$\Pr\{A|c\} = \frac{0.9 \times 0.6}{0.84} = 64.3\%$$

Ejercicio - Ing. Teleco Enero 2009 - C1

Se sabe que en una cierta región en un mismo día el clima sólo puede ser lluvioso o seco, pero no ambas cosas; además se sabe que dadas las condiciones climatológicas de un día concreto, las condicones del día siguiente son las mismas con probabilidad 0.6, y son diferentes con probabilidad 0.4, y no dependen de las condiciones de días anteriores.
Si llamanos a los sucesos: L_n="Lluvioso en el enésimo día"
S_n= "Seco en el enésimo día"
Sabiendo que $\Pr\{L_1\} = 0.1$

a) Demuestra que $\Pr\{L_2\} = 0.42$ y calcula $\Pr\{L_3\}$
b) Calcula la probabilidad de que haya llovido el primer día si sabemos que llovió el segundo día.
c) Calcula $\Pr\{S_4 \cap L_3 \cap S_2 \cap L_1\}$

Solución a) y b)

$a)$ *Demuestra que* $\Pr\{L_2\} = 0.42$ *y calcula* $\Pr\{L_3\}$
Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$\begin{aligned}
\Pr\{L_2\} &= \Pr\{L_2|L_1\}\Pr\{L_1\} + \Pr\{L_2|S_1\}\Pr\{S_1\} \\
&= 0.6 \times 0.1 + 0.4 \times 0.9 = 42\% \\
\Pr\{L_3\} &= \Pr\{L_3|L_2\}\Pr\{L_2\} + \Pr\{L_3|S_2\}\Pr\{S_2\} \\
&= 0.6 \times 0.42 + 0.4 \times (1 - 0.42) = 48.4\%
\end{aligned}$$

$b)$ *Calcula la probabilidad de que haya llovido el primer día si sabemos que llovió el segundo día.*

$$\Pr\{L_1|L_2\} = \frac{\Pr\{L_2|L_1\}\Pr\{L_1\}}{\Pr\{L_2\}} = \frac{0.6 \times 0.1}{0.42} = 14.3\%$$

Solución c)

$c)$ *Calcula* $\Pr\{S_4 \cap L_3 \cap S_2 \cap L_1\}$

$$\begin{aligned}
\Pr\{S_4 \cap L_3 \cap S_2 \cap L_1\} &= \Pr\{S_4|L_3 \cap S_2 \cap L_1\}\Pr\{L_3 \cap S_2 \cap L_1\} \\
&= \Pr\{S_4|L_3\}\Pr\{L_3 \cap S_2 \cap L_1\} \\
&= \Pr\{S_4|L_3\}\Pr\{L_3|S_2 \cap L_1\}\Pr\{S_2 \cap L_1\} \\
&= \Pr\{S_4|L_3\}\Pr\{L_3|S_2\}\Pr\{S_2 \cap L_1\} \\
&= \Pr\{S_4|L_3\}\Pr\{L_3|S_2\}\Pr\{S_2|L_1\}\Pr\{L_1\} \\
&= 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 = 0.64\%
\end{aligned}$$

Ejercicio - Ing. Teleco Septiembre 2005 - C2

Se dispone de dos urnas. La urna U_1 contiene el 70% de bolas blancas y el 30% de bolas negras, y la urna U_2, el 30% de bolas blancas y el 70% de bolas negras.
Se selecciona una de estas urnas al azar y se toman diez bolas una tras otra con reemplazamiento.
El resultado es: $B = bnbbbbnbbb$, donde b indica bola blanca y n indica bola negra.

¿Cual es la probabilidad de que esta muestra provenga de U_1?

Solución $1/2$

Seleccion de la urna: como hay 2 urnas y se toma al azar :

$$\Pr\{U_1\} = \Pr\{U_2\} = 0.5$$

El suceso está compuesto por la ocurrencia conjunta de 10 sucesos independientes, ya que el resultado de una extracción con reemplazamiento no modifica las probabilidades de las siguientes. Como

$$\Pr\{b|U_1\} = 0.7 \quad \text{y} \quad \Pr\{n|U_1\} = 0.3$$

se verifica

$$\begin{aligned}\Pr\{B|U_1\} &= \Pr\{bnbbbbnbbb|U_1\} \\ &= \Pr\{b|U_1\} \cdot \Pr\{n|U_1\} \cdot \Pr\{b|U_1\} \cdots \Pr\{b|U_1\} \\ &= (\Pr\{b|U_1\})^8 \, (\Pr\{n|U_1\})^2 = 0.7^8 \times 0.3^2\end{aligned}$$

Solución $2/2$

De la misma manera,

$$\Pr\{B|U_2\} = 0.3^8 \times 0.7^2$$

La probabilidad buscada es $\Pr\{U_1|B\}$.

Aplicando el Teorema de Bayes :

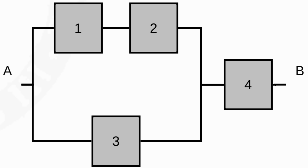
$$\begin{aligned}
\Pr\{U_1|B\} &= \frac{\Pr\{B|U_1\}\Pr\{U_1\}}{\Pr\{B|U_1\}\Pr\{U_1\} + \Pr\{B|U_2\}\Pr\{U_2\}} \\
&= \frac{0.7^8 \times 0.3^2 \times 0.5}{0.7^8 \times 0.3^2 \times 0.5 + 0.3^8 \times 0.7^2 \times 0.5} \\
&= 99.4\%
\end{aligned}$$

Ejercicio - Ing. Teleco Septiembre 2005 - C2

En la red de comunicaciones de 4 componentes conectados según la figura, la probabilidad de que funcione cada uno de los componentes es independiente de los demás, siendo la probabilidad de que funcione el componente 1 de 0.9, el componente 2 de 0.8, el componente 3 de 0.75 y el componente 4 de 0.85.

La red funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione.

Con los supuestos anteriores, calcular la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B.



Solución

Denotamos por

$$\begin{aligned} F_{1234} &= \text{“la red funciona”} \\ F_{123} &= \text{“la subred formada por los componentes } 1, 2 \text{ y } 3 \text{ funciona”} \\ F_{12} &= \text{“la subred formada por los componentes } 1 \text{ y } 2 \text{ funciona”} \\ F_i &= \text{“la subred formada por el sólo componente } i \text{ funciona”} \end{aligned}$$

$$\Pr\{F_{12}\} = \Pr\{F_1 \cap F_2\} \stackrel{\text{ind}}{=} \Pr\{F_1\} \Pr\{F_2\} = 0.9 \times 0.8 = 0.72$$

$$\begin{aligned} \Pr\{F_{123}\} &= \Pr\{F_{12} \cup F_3\} = \Pr\{F_{12}\} + \Pr\{F_3\} - \Pr\{F_{12} \cap F_3\} \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} \Pr\{F_{12}\} + \Pr\{F_3\} - \Pr\{F_{12}\} \Pr\{F_3\} \\ &= 0.72 + 0.75 - 0.72 \times 0.75 = 0.93 \end{aligned}$$

$$\Pr\{F_{1234}\} = \Pr\{F_{123} \cap F_4\} \stackrel{\text{ind}}{=} \Pr\{F_{123}\} \Pr\{F_4\} = 0.93 \times 0.85 = 0.7905$$

y al final

$$\Pr\{\overline{F_{1234}}\} = 1 - \Pr\{F_{1234}\} = 20.95\%$$