Ejercicios de Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO MAGISTRAL

GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS AUDIOVISUALES

07/05/2009

Ejercicio

El tiempo en minutos que un ordenador tarda en ejecutar una tarea es una v.a. $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.
Para hacer un estudio de la evolución temporal del sistema se construye el proceso estocástico $X(t)$ definido como el tiempo que resta para completar la tarea sabiendo que ya ha consumido t minutos.

a) Determina $\mathbb{E}[X(t)]$, $\mathbb{V}\text{ar}[X(t)]$, $\mathbb{E}[X(t)^2]$.

b) Indica si cada una de las funciones del apartado anterior depende del tiempo e interpreta el resultado.

Ejercicio

El tiempo en minutos que un ordenador tarda en ejecutar una tarea es una v.a. $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.
Para hacer un estudio de la evolución temporal del sistema se construye el proceso estocástico $X(t)$ definido como el tiempo que resta para completar la tarea sabiendo que ya ha consumido t minutos.

a) Determina $\mathbb{E}[X(t)]$, $\mathbb{V}\text{ar}[X(t)]$, $\mathbb{E}[X(t)^2]$.

b) Indica si cada una de las funciones del apartado anterior depende del tiempo e interpreta el resultado.

SOLUCIÓN:

El proceso $X(t)$ se define como $X(t) = \max\{0, Y - t\}$.

a) $\mu_X(t) = \int_0^\infty \max\{0, y - t\}\, \lambda e^{-\lambda y}\, dy = \int_t^\infty (y - t)\lambda e^{-\lambda y}\, dy = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$;

$$\mathbb{V}\text{ar}[X(t)] = \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \left(2 - e^{-\lambda t}\right);$$

$$\mathbb{E}[X(t)^2] = \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t}.$$

b) Todas las funciones del apartado anterior dependen de t. Es decir que el proceso $X(t)$ no es estacionario, tampoco en el sentido débil.

Ejercicio

Sea $X(t)$ un proceso normal y débilmente estacionario con $E[X(t)] = 0$ y función de autocorrelación $R_X(\tau) = 1/(1+\tau^2)$:

a) Calcula la probabilidad de que $X(0) + X(1) - X(2)$ sea positivo.

b) ¿Son $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ variables aleatorias independientes? Justifica la respuesta.

a) *Calcula la probabilidad de que* $X(0)+X(1)-X(2)$ *sea positivo.*

Como $X(t)$ es un proceso normal, entonces la variable aleatoria $X(0)+X(1)-X(2)$ es Normal con media:

$$\mathbb{E}[X(0)+X(1)-X(2)] = \mathbb{E}[X(0)] + \mathbb{E}[X(1)] - \mathbb{E}[X(2)] = 0+0-0 = 0$$

Dada la simetría de la densidad de una distribución normal respecto a su media, tendremos que

$$\Pr(X(0)+X(1)-X(2)>0) = \frac{1}{2}$$

b) *¿Son $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ variables aleatorias independientes? Justifica la respuesta.*

Como $X(t)$ es un proceso estocástico normal, la variable aleatoria bidimensional $(X(0), X(1))$ tiene también distribución normal. Nos preguntan si $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ son independientes. Entonces la variable aleatoria bidimensional dada por

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(0) - 2X(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \end{pmatrix}$$

tiene distribution normal. De este, modo las variables $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ son independientes si y sólo si su covarianza es igual a cero. Para ver si es así, calcularemos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathrm{ov}[X(0), X(0) - 2X(1)] &= \mathbb{E}[X(0)(X(0) - 2X(1))] - \mathbb{E}[X(0)]E[X(0) - 2X(1)] \\ &= E[X(0)^2 - 2X(0)X(1)] = E[X(0)^2] - 2E[X(0)X(1)] \\ &= R_X(0) - 2R_X(1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto las variables aleatorias $X(0)$ e Y son independientes.

Problema con v.a. no independientes

Sea

$$X(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$$

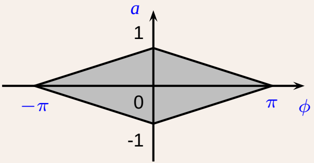
un proceso estocástico con A y Φ dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f_{\Phi,A}(\phi, a) = \begin{cases} k, & |\phi| + |\pi a| \le \pi; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

a) Determinar la constante k para que $f_{\Phi,A}$ sea una función de densidad.
b) Calcular la función de media y de autocorrelación del proceso $X(t)$.
c) Estudiar la estacionariedad de $X(t)$ en sentido estricto y en sentido débil.

Solución: **a)**

a) *Determinar la constante k para que $f_{\Phi,A}$ sea una función de densidad.*



Descomponiendo la desigualdad $|\pi a| + |\phi| \leq \pi$ en las cuatro desigualdades

$$\begin{aligned} a &\leq 1 - \phi/\pi \\ a &\geq -1 - \phi/\pi \\ a &\leq 1 + \phi/\pi \\ a &\geq -1 + \phi/\pi \end{aligned}$$

se obtiene el recinto $\mathfrak{R}$ de la función $f_{Phi,A}$ dado en la figura.
Como el área de $\mathfrak{R}$ es igual a 2π resulta que $k = 1/2\pi$.

A continuación vamos a llamar con $\mathfrak{R}^+$ la parte derecha del recinto, es decir $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R} \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ y con $\mathfrak{R}^- = \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^+$ la parte izquierda.

b) *Calcular la función media y de autocorrelación del proceso $X(t)$.*

Como las V.A. A y Φ no son independientes tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= \mathbb{E}[A\sin(\omega t+\Phi)] = \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}} a\sin(\omega t+\phi)\, f_{\Phi,A}(\phi,a)\,da\,d\phi \\
&= \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}-} + \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}+} a\sin(\omega t+\phi)\frac{da\,d\phi}{2\pi} \\
&= \int_{\phi=-\pi}^{0} \sin(\omega t+\phi) \int_{a=-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\frac{da\,d\phi}{2\pi} + \int_{\phi=0}^{\pi} \sin(\omega t+\phi) \int_{a=-(1-\frac{\phi}{\pi})}^{(1-\frac{\phi}{\pi})} a\frac{da\,d\phi}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{0} [\sin(\omega t+\phi)+\sin(\omega t-\phi)] \left(\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\,da\right)\frac{d\phi}{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

siendo

$$\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\,da = \left[\frac{a^2}{2}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} = 0$$

De forma análoga para calcular la función de autocorrelación tenemos que

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[A^2\sin(\omega t_1+\Phi)\sin(\omega t_2+\Phi)] = \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}} a^2\sin(\omega t_1+\phi)\sin(\omega t_2+\phi)\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2[\sin(\omega t_1+\phi)\sin(\omega t_2+\phi)+\sin(\omega t_1-\phi)\sin(\omega t_2-\phi)]\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

y utilizando la fórmula $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

$$= \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2\cos(\omega(t_1-t_2))\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

$$- \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\phi)+\cos(\omega(t_1+t_2)-2\phi)]\frac{da\,d\phi}{4\pi} = I_1 - I_2.$$

La primera integral, I_1, es igual a

$$I_1 = \frac{\cos(\omega(t_1-t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\frac{a^3}{3}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} d\phi = \frac{\cos(\omega(t_1-t_2))}{3\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{\phi}{\pi}\right)^3 d\phi$$

$$= \frac{1}{12}\cos(\omega(t_1-t_2))$$

Utilizando la fórmula $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$, la integral I_2 es

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left(\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2\,da\right)d\phi \\
&= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left[\frac{a^3}{3}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} d\phi \\
&= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left(1+\frac{\phi}{\pi}\right)^3 d\phi = \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\int_{0}^{1}\cos(2\pi x-2\pi)x^3dx \\
&= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\int_{0}^{1}\cos(2\pi x)x^3dx
\end{aligned}
$$

y utilizando tres veces la integración por partes obtenemos

$$
= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\left(\frac{3}{4\pi^2}\right) = \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{4\pi^2}
$$

Al final

$$
R_X(t_1,t_2) = \frac{1}{12}\cos(\omega(t_1-t_2)) - \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{4\pi^2}
$$

SOLUCIÓN: **c)**

c) *Estudiar la estacionariedad de X(t) en sentido estricto y en sentido débil.*

Como $R_X(t_1, t_2)$ no depende solo de $\tau = t_1 - t_2$ sino también de $t_1 + t_2$ el proceso **NO** es estacionario en el sentido débil y por lo tanto tampoco en el sentido estricto.