Ejercicios de Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 67

GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS AUDIOVISUALES

05/05/2009

Ejemplo

Se considera el proceso

$$X(t) = A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t),$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[-1, 1]$.
Estudiar la ergodicidad en media y autocorrelación.

Ejemplo

Se considera el proceso

$$X(t) = A\, \cos(\omega\, t) + B\, \sin(\omega\, t),$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[-1, 1]$.
Estudiar la ergodicidad en media y autocorrelación.

SOLUCIÓN:

El proceso $X(t)$ es ergódico en la media, siendo $\mu_T = \mu_X = 0$
El proceso $X(t)$ **NO** es ergódico en la autocorrelación siendo

$$R_X(\tau) = \frac{1}{3} \cos(\omega\, t)$$

$$R_T(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)dt = \frac{A^2 + B^2}{2} \cos(\omega\, t)$$

y entonces $R_X(\tau) \neq R_T(\tau)$

Ejercicio

TEL.TEC.FEB.2003.P1

Si X e Y son Variables Aleatorias independientes, con distribución Normal de media cero y varianza uno, se define el proceso Gaussiano

$$Z(t) = Xcos(2\pi t) + Ysin(2\pi t).$$

a) Determinar la función de distribución conjunta de las variables aleatorias $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$ obtenidas por observar $Z(t)$ en los instantes t_1 y t_2.

SOLUCIÓN:

a) *Determinar la función de distribución conjunta de las v.a. $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$ obtenidas por observar $Z(t)$ en los instantes t_1 y t_2.*

Tenemos que

$$\begin{aligned} Z &= \begin{pmatrix} Z(t_1) \\ Z(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\cos(2\pi t_1) + Y\sin(2\pi t_1) \\ X\cos(2\pi t_2) + Y\sin(2\pi t_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1) & \sin(2\pi t_1) \\ \cos(2\pi t_2) & \sin(2\pi t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z va a ser una Normal bivariante al ser una trasformación linear de vector Normal bivariante $(X, Y) \sim \mathrm{N}(0_2, I_2)$.

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$Z \sim \mathrm{N}(0_2, AI_2A') = \mathrm{N}(0_2, AA') = \mathrm{N}\left(0_2, \begin{pmatrix} 1 & \sigma(t_1, t_2) \\ \sigma(t_1, t_2) & 1 \end{pmatrix}\right)$$

donde $\sigma(t_1, t_2) = \cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2) + \sin(2\pi t_1)\sin(2\pi t_2) = \cos(2\pi(t_1 - t_2))$.
Por supuesto si $t_1 = t_2$, la covarianza es 1, y el coeficiente de correlación es también uno, porque las dos variables son iguales.