Ejercicios de Vectores Aleatorios

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 66

GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS AUDIOVISUALES

27/04/2009

Ejercicio

SEP2006 ING. TEL. (C2)

Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial con media 1.
Se definen las variables aleatorias U y V como:

$$U = X/(X+Y),$$
$$V = X+Y.$$

Encuentra la función de densidad conjunta de U y V.

Ejercicio

SEP2006 ING. TEL. (C2)

Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial con media 1.
Se definen las variables aleatorias U y V como:

$$U = X/(X+Y),$$
$$V = X+Y.$$

Encuentra la función de densidad conjunta de U y V.

SOLUCIÓN:

$$f_{(U,V)}(u,v) = v\,e^{-v} \quad 0 < u < 1,\ v > 0$$

Ejercicio

TEL.TEC.JUN.2007.P2

Sea el vector aleatorio bidimensional (X, Y) con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} a, & \text{si } -1 < x < 0,\ -x-1 < y < 1; \\ a + \frac{1}{2}, & \text{si } 0 < x < 1,\ x-1 < y < 1; \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Determinar a para que $f(x,y)$ sea función de densidad.

b) Calcula la probabilidad de que el producto de ambas variables X e Y sea negativo.

c) Calcula la función de densidad de X.

d) Calcular la función de densidad de $Y|X = 0.5$.

e) Calcular $\mathbb{E}[Y^2|X = 0.5]$

Solución: 1/5

a. Determinar a para que $f(x,y)$ sea función de densidad.

Para que $f_{X,Y}(x,y)$ sea función de densidad se tiene que verificar que $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ y que $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dydx = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x-1}^{1} a dy \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\int_{x-1}^{1} \left(a + \frac{1}{2} \right) dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^{0} a\,(x+2) dx + \int_{0}^{1} \left(a + \frac{1}{2} \right) (-x+2) dx = \\ &= \frac{3}{2} a + \frac{3}{2} a + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

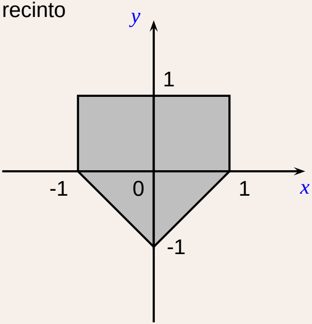
Luego la función de densidad conjunta será:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } -1 < x < 0,\ -x-1 < y < 1 \\ \frac{7}{12} & \text{si } 0 < x < 1,\ x-1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Solución: 2/5

a) Determinar a para que $f(x,y)$ sea función de densidad.

Podríamos haber calculado el valor de a por razonamiento geométrico, siendo el recinto



Calculamos el volumen de un prisma:

$$1 \cdot a + \frac{1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot \left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1 \cdot 1}{2}\left(a + \frac{1}{2}\right)$$

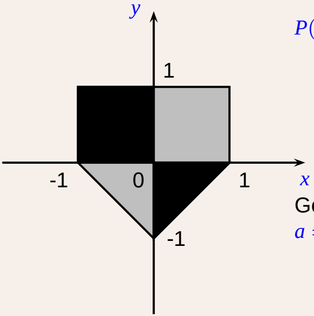
y imponiendo que sea igual a 1 obtenemos que

$$a = \frac{1}{12}.$$

Solución: 3/5

b) Calcula la probabilidad de que el producto de ambas variables X e Y sea negativo.

Sea S el suceso *"el producto de ambas variables X e Y es negativo"*. Sobre el recinto anterior, nos están pidiendo la parte sombreada



$$\begin{aligned} P(S) &= P\left([X<0\cap Y>0]\cup[X>0\cap Y<0]\right) \\ &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1}\frac{1}{12}dy\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\int_{x-1}^{0}\frac{7}{12}dy\right)dx \\ &= \frac{1}{12}+\frac{7}{24}=\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Geométricamente, y una vez que sabemos que $a=1/12$,

$$1\cdot\frac{1}{12}+\frac{1\cdot 1}{2}\cdot\frac{7}{12}=\frac{3}{8}$$

SOLUCIÓN: 4/5

c) Calcula la función de densidad de X.

La función de densidad marginal de X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-x-1}^{1} \frac{1}{12} dy = \frac{1}{12}(x+2) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \int_{x-1}^{1} \frac{7}{12} dy = \frac{7}{12}(-x+2) & \text{si } \quad 0 \leq \text{x} \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

SOLUCIÓN TEÓRICA: 5/5

d) Calcular la función de densidad de $Y|X = 0.5$.

La función de densidad de $Y|X = 0.5$ es:

$$f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Ya que

$$\text{Si } -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \qquad f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y) = \frac{f\left(\frac{1}{2}, y\right)}{f_X\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{7}{12}\left(-\frac{1}{2}+2\right)} = \frac{2}{3}$$

e) Calcular $E[Y^2|X = 0.5]$

$$E\left[Y^2|X = \frac{1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y)dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} y^2 \frac{2}{3} dy = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{4}$$