Tema 3: Ejercicios de Variables Aleatorias

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 83 - INGENIERÍA INFORMÁTICA

03 de Abril 2008

Ejercicio

Un sistema de comunicaciones dispone de un transmisor que envía los símbolos 0, 1 y 2 a través de un canal hasta un receptor. Este canal puede cambiar el símbolo transmitido.

La probabilidad de que se reciba el mismo símbolo que se ha transmitido es de 0.8.

Por otra parte la probabilidad de recibir de forma defectuosa un símbolo es igual con independencia del símbolo transmitido.

Las probabilidades de transmisión de los símbolos 0,1 y 2 son de 0.5, 0.3 y 0.2 respectivamente.

Si se llama X la variable aleatoria que toma el valor del símbolo recibido, calcular:

a) $\mathbb{E}[X]$

b) $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$

Ejercicio

Un sistema de comunicaciones dispone de un transmisor que envía los símbolos 0, 1 y 2 a través de un canal hasta un receptor. Este canal puede cambiar el símbolo transmitido.

La probabilidad de que se reciba el mismo símbolo que se ha transmitido es de 0.8.

Por otra parte la probabilidad de recibir de forma defectuosa un símbolo es igual con independencia del símbolo transmitido.

Las probabilidades de transmisión de los símbolos 0,1 y 2 son de 0.5, 0.3 y 0.2 respectivamente.

Si se llama X la variable aleatoria que toma el valor del símbolo recibido, calcular:

a) $\mathbb{E}[X]$

b) $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$

SOLUCIÓN:

a) $\mathbb{E}[X] = 0.79$

b) $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 0.6459$

Ejercicio

Una variable aleatoria X que toma valores en el intervalo $[0, 1]$ tiene una función de densidad

$$f(x) = a + b\,x,$$

donde a y b son constantes a determinar.
Se pide:

a) Calcula a y b para que $f(x)$ sea una función de densidad de forma que la densidad de probabilidad en $X = 1$ sea el doble que en $X = 0$.

b) Calcula los cuartiles de la variable aleatoria X

Ejercicio

Una variable aleatoria X que toma valores en el intervalo $[0, 1]$ tiene una función de densidad

$$f(x) = a + b\,x,$$

donde a y b son constantes a determinar.
Se pide:

a) Calcula a y b para que $f(x)$ sea una función de densidad de forma que la densidad de probabilidad en $X = 1$ sea el doble que en $X = 0$.

b) Calcula los cuartiles de la variable aleatoria X

SOLUCIÓN:

a) $a = 2/3$, $b = 2/3$;

b) $Q_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} - 2\right) = 0.3229$,

$Q_2 = M = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10} - 2\right) 0.5811$ y

$Q_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{13} - 2\right) = 0.8028$.

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria de función de densidad

$$f(x) = a\,x^{-\frac{1}{2}},$$

definida en $0 < x \leq 1$.

a) Determina el valor de a para que $f(x)$ sea función de densidad.

Sea Y otra variable aleatoria cuya esperanza es $\mathbb{E}[Y] = 2/3$.

b) Calcula la esperanza de la variable aleatoria $Z = X + Y$. (*junio 05*)

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria de función de densidad

$$f(x) = a\,x^{-\frac{1}{2}},$$

definida en $0 < x \leq 1$.

a) Determina el valor de a para que $f(x)$ sea función de densidad.

Sea Y otra variable aleatoria cuya esperanza es $\mathbb{E}[Y] = 2/3$.

b) Calcula la esperanza de la variable aleatoria $Z = X + Y$. (*junio 05*)

SOLUCIÓN:

a) $a = 1/2$;

b) $\mathbb{E}[Z] = 1$.

Ejercicio

Sea Z una variable aleatoria *Gamma* de parámetros λ y $b > 0$ (que se denota por $Gamma(\lambda, b)$) cuya función de densidad $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} e^{-\lambda x} x^{b-1}, & x > 0; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

siendo $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx$, con $p > 0$.

a) Determinar $\mathbb{E}[Z]$

b) Determinar $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z]$

Ejercicio

Sea Z una variable aleatoria *Gamma* de parámetros λ y $b > 0$ (que se denota por $Gamma(\lambda, b)$) cuya función de densidad $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} e^{-\lambda x} x^{b-1}, & x > 0; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

siendo $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \, dx$, con $p > 0$.

a) Determinar $\mathbb{E}[Z]$

b) Determinar $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z]$

Solución:

a) b/λ;

b) b/λ^2.

Ejercicio

Cierta operación industrial está compuesta por dos tareas consecutivas, realizadas de forma automática por dos equipos con distinta CPU, tal y como muestra la Figura (1). Llamemos T_1 al tiempo que la **CPU-1** tarda en ejecutar la *Tarea 1* y T_2 al tiempo que la **CPU-2** tarda en ejecutar la *Tarea 2*.

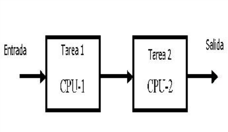

Figure: (1)

La probabilidad de que la **CPU-1** tarde en ejecutar la *Tarea 1* mas de $t > 0$ segundos es

$$\Pr(T_1 > t) = e^{-t/\alpha};$$

siendo $\alpha > 0$ una constante, mientras que la probabilidad de que la **CPU-2** tarde en ejecutar la *Tarea 2* mas de $t > 0$ segundos es

$$\Pr(T_2 > t) = e^{-t/\beta};$$

con $\beta > 0$ una constante que verifica $\beta > \alpha$. Estas probabilidades basadas en funciones exponenciales con exponentes negativos son muy frecuentes en procesos reales.

La Figura (2) muestra estas probabilidades, donde puede apreciarse que la probabilidad de que la tarea dure mas de t segundos decae *exponencialmente* con t. **Se pide:**

a) Calcula la función distribución de T_1.

b) Calcula el *tiempo medio* que la **CPU-2** tardará en ejecutar la *Tarea 2*.

c) Calcula el *tiempo medio* que se tardará en ejecutar la operación completa (*Tarea 1* y *Tarea 2*).

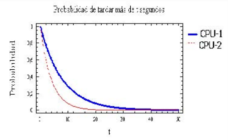

Figure: (2)

SOLUCIÓN:

a)

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-t/\alpha};$$

b)

$$\mathbb{E}[T_2] = \beta;$$

c)

$$\mathbb{E}[T_1 + T_2] = \alpha + \beta.$$