Tema 6 - Introducción

Tema 5. Probabilidad

- Conceptos básicos.
- Interpretación y propiedades básicas
- Probabilidad condicional y reglas de cálculo.

$\Downarrow$ Generalización

Tema 6. Variables aleatorias unidimensionales

- Distribución.
- Características: media, varianza, etc.
- Transformaciones.

Tema 6 Variables aleatorias unidimensionales

Los contenidos a desarrollar en este tema son los siguientes:

- Concepto de variable aleatoria.
- Variables discretas.
- La función de masa (de probabilidad) y sus propiedades.
- La función de distribución y sus propiedades.
- La esperanza, varianza y desviación típica.
- Otros momentos.

Los contenidos a desarrollar en este tema son los siguientes (continuación):

- Variables continuas.
- Funciones de distribución y densidad.
- Momentos de variables continuas.
- Transformaciones.
- Media y varianza de una transformación lineal.

Lecturas recomendadas: Capítulo 15 del libro de Peña y Romo (1997) y las secciones 4.1 a 4.3 y 5.1 a 5.3 de Newbold (2001).

Variable aleatoria

► En el tema anterior, hemos trabajado con sucesos, por ejemplo $A =$ "la suma de dos tiradas de un dado es 7".

► Ahora queremos generalizar y considerar sucesos con valores no específicos o variables, por ejemplo "la suma de las dos tiradas" o "el número de llamadas telefónicas en una hora".

Definición 1. *Una* **variable aleatoria** *es una función que asocia un valor numérico a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.*

Ejemplo 1. *Consideramos el experimento de lanzar un dado equilibrado dos veces. Sea $X =$ suma de las dos tiradas.*

¿Cuantos sucesos elementales tiene este experimento?

¿Cuantos y qué valores puede tomar la variable X?

Variable aleatoria

Ejemplo 1. *La tabla muestra los sucesos elementales asociados con cada posible valor de X.*

x	Sucesos elementales					
2	$(1,1)$					
3	$(1,2)$	$(2,1)$				
4	$(1,3)$	$(2,2)$	$(3,1)$			
5	$(1,4)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(4,1)$		
6	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,3)$	$(4,2)$	$(5,1)$	
7	$(1,6)$	$(2,5)$	$(3,4)$	$(4,3)$	$(5,2)$	$(6,1)$
8	$(2,6)$	$(3,5)$	$(4,4)$	$(5,3)$	$(6,2)$	
9	$(3,6)$	$(4,5)$	$(5,4)$	$(6,3)$		
10	$(4,6)$	$(5,5)$	$(6,4)$			
11	$(5,6)$	$(6,5)$				
12	$(6,6)$					

Variable aleatoria discreta

Variable aleatoria

- Se denotan variables aleatorias por letras mayúsculas, por ejemplo, X, Y, Z, etc.

- Se denotan sus posibles valores con letras minúsculas, por ejemplo, x, y, z, etc.

- Las variables pueden ser **discretas**, como en el ejemplo 1, y tomar valores en un conjunto finito o infinito numerable de valores.

- También pueden ser **continuas**, por ejemplo, el tiempo que dure una llamada telefónica, y tomar valores en un intervalo de los números reales.

- El tratamiento de los dos tipos de variable es (matemáticamente) distinto pero comparten los conceptos claves: distribución, media, varianza, etc.

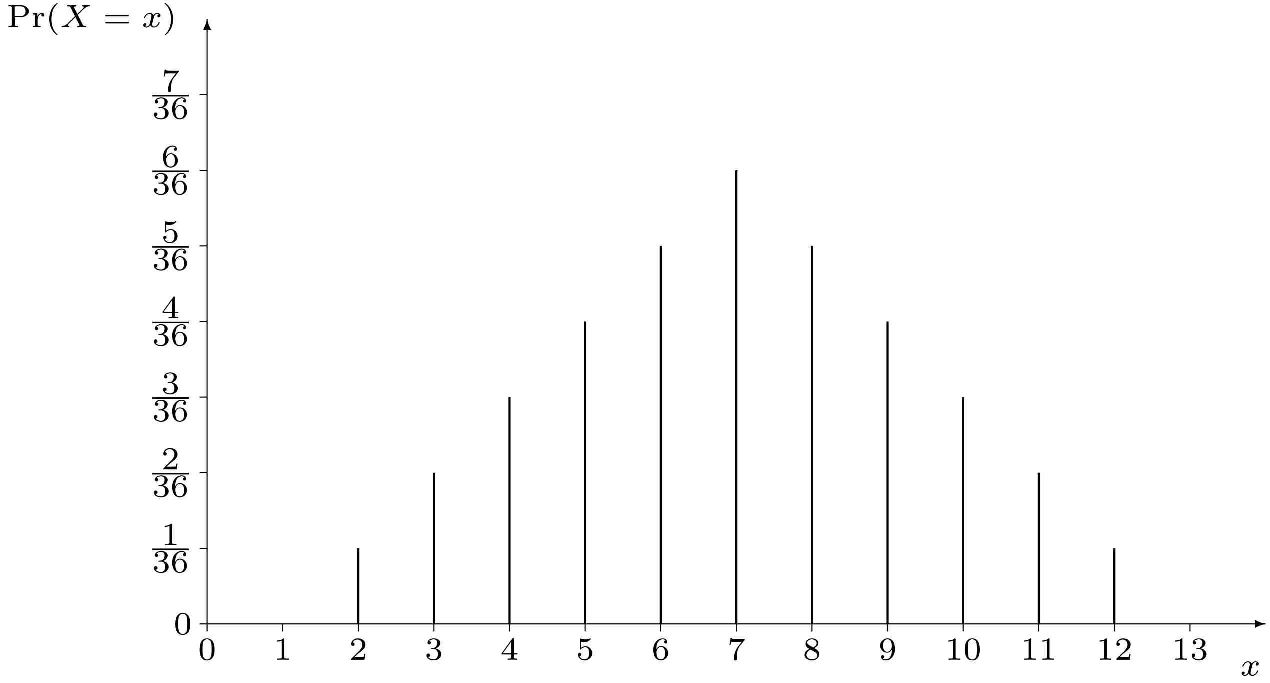
Función de probabilidad de una v.a. discreta

Definición 2. *Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Sean $p_i = \Pr(X = x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots$ las correspondientes probabilidades. Este conjunto de probabilidades se llama* **función de probabilidad** *o* **función de masa** *de la variable.*

Ejemplo 1. *La función de probabilidad de la variable X = suma de las dos tiradas es la siguiente:*

x	$\Pr(X = x)$
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$

Gráfico de la función de probabilidad de X



Vemos que, en este caso, la distribución es simétrica y unimodal.

Propiedades de la función de probabilidad

Propiedades de la función de probabilidad de una v.a. discreta:

1. $0 \leq \Pr(X = x_i) \leq 1$ para todos los valores x_i.
2. $\sum_i \Pr(X = x_i) = 1$.
3. $\Pr(X \leq x) = \sum_{i,\ x_i \leq x} \Pr(X = x_i)$.
4. $\Pr(X > x) = 1 - \Pr(X \leq x)$.

Ejemplo 1. *Hallar las siguientes probabilidades:*

1. *Probabilidad de que la suma de los dados es menor o igual a 4.*
2. *Probabilidad de que la suma de los dados está entre 6 y 8 inclusive.*
3. *Probabilidad de que la suma de los dados es mayor que 3.*

Ejemplo 2. *En ocasiones, algunas líneas aéreas venden más pasajes que los disponibles en un vuelo. Una compañía ha vendido 205 billetes que corresponden a un avión con 200 plazas. Sea X la variable aleatoria que expresa el número de viajeros que se presentan en el aeropuerto para viajar en el avión. La distribución de X es*

x	198	199	200	201	202	203	204	205
$\Pr(X = x)$	,05	,09	,15	,20	,23	,17	,09	,02

Hallar la probabilidad de que todos los pasajeros que llegan a tomar el vuelo tengan plaza. $\boxed{\Pr(X \leq 200)}$

¿Cuál es la probabilidad de que se quede sin plaza alguno de los pasajeros que se presentan en el aeropuerto? $\boxed{\Pr(X > 200)}$

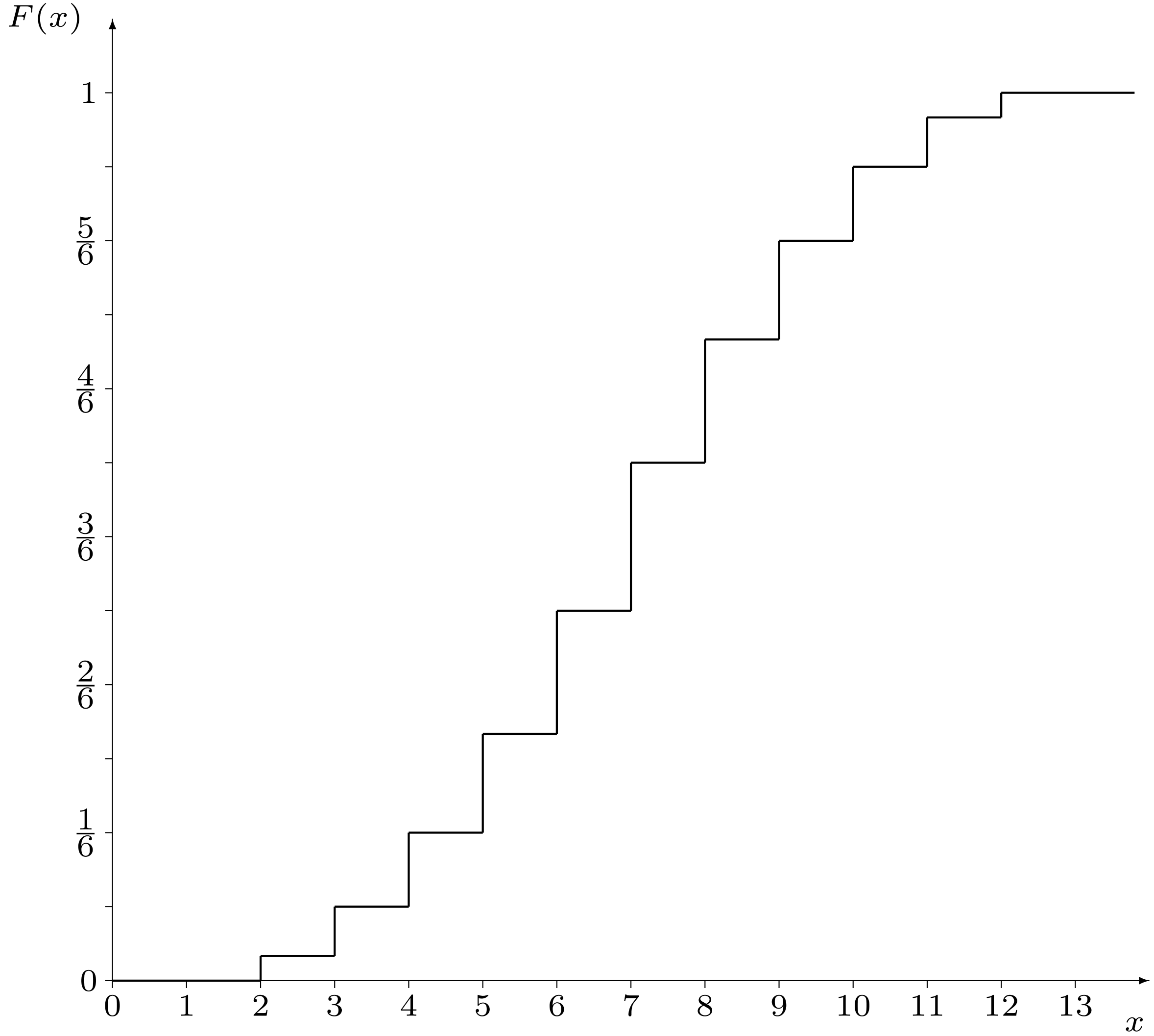
Función de distribución de una v.a. discreta

Definición 3. *La* **función de distribución** *(acumulada) de una variable aleatoria X es la función $F(x) = \Pr(X \leq x)$.*

Ejemplo 3. *Volviendo al ejemplo 1, obtenemos la función de distribución de X = "la suma de los dos dados".*

x	$\Pr(X = x)$	$F(x)$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$
7	$\frac{6}{36}$	$\frac{21}{36}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{26}{36}$
9	$\frac{4}{36}$	$\frac{30}{36}$
10	$\frac{3}{36}$	$\frac{33}{36}$
11	$\frac{2}{36}$	$\frac{35}{36}$
12	$\frac{1}{36}$	1

Gráfico de la función de distribución de X

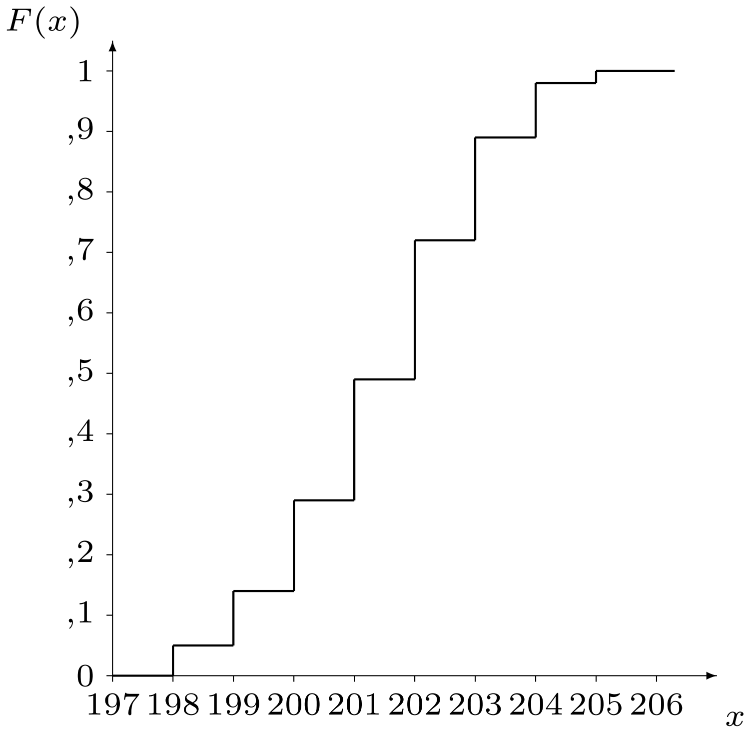


Función de distribución de una v.a. discreta

- Para una variable discreta, la función de distribución es una función de tipo escalón.

- Propiedades:

  1. $F(-\infty) = 0$
  2. $F(\infty) = 1$
  3. Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$.



Ejemplo 4. *En el Ejemplo 2, tenemos*

x	198	199	200	201	202	203	204	205
$\Pr(X = x)$	,05	,09	,15	,20	,23	,17	,09	,02
$F(x)$	,05	,14	,29	,49	,72	,89	,98	1

Esperanza de una v.a. discreta

- Supongamos que se repite un experimento (tirar dos dados) n veces y que se observan los resultados (suma de las dos tiradas) cada vez.

- Supongamos que se observa n_i repeticiones del valor x_i.

- Calculamos la media muestral, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i = \sum_i f_i x_i$ donde f_i es la proporción de veces que ha ocurrido x_i.

- Supongamos un número infinito de repeticiones, tenemos $f_i \to \Pr(X = x_i)$ y

$$\bar{x} \to E[X] = \sum_i \Pr(X = x_i) \times x_i$$

$\boxed{\bar{x} \text{ es una medida de localización de la muestra.}}$

y

$\boxed{E[X] \text{ es una medida de localización de la distribución de } X.}$

Esperanza de una v.a. discreta

Definición 4. *La* **esperanza** *o media de una variable aleatoria discreta X es*

$$E[X] = \sum_i \Pr(X = x_i) \times x_i.$$

Ejemplo 5. *Volvemos al Ejemplo 1. La media de la suma de dos dados, X, es*

$$E[X] = \frac{1}{36} \times 2 + \frac{2}{36} \times 3 + \frac{3}{36} \times 4 + \ldots + \frac{2}{36} \times 11 + \frac{1}{36} \times 12 = \boxed{7}.$$

Ejemplo 6. *El número medio de pasajeros que llegan al aeropuerto es*

$$E[X] = ,05 \times 198 + ,09 \times 199 + \ldots + ,02 \times 205 = \boxed{201.44}.$$

Observamos que la media no siempre es uno de los valores posibles de X.

Esperanza de una función de X

Definición 5. *Sea $g(X)$ una función de X. La esperanza de $g(X)$ es*

$$E[g(X)] = \sum_i \Pr(X = x_i) \times g(x_i)$$

Ejemplo 7. *En el Ejemplo 2 supongamos que la compañía aérea recibe 250 euros por cada billete que vende pero que tiene que devolver el precio del ticket y además pagar una multa de 1000 euros a cada pasajero que no puede montar en el avión.*

Calcular la cantidad de dinero que espera cobrar la compañía en este vuelo.

- Sea $g(X)$ las ganancias de la compañía.
- Las ventas totales de tickets son $250 \times 205 = 51250$ euros.
- Si llegan $x \leq 200$ personas entonces $g(x) = 51250$.
- Si llegan $x > 200$ personas, $g(x) = 51250 - (x - 200) \times (1250)$.

Ejemplo 7.

$$
\begin{aligned}
E[g(X)] \quad = \quad & 51250 \times ,05 + 51250 \times ,09 + 51250 \times ,15 \\
& +(51250 - (201 - 200) * 1250) \times ,20 \\
& +(51250 - (202 - 200) * 1250) \times ,23 \\
& +(51250 - (203 - 200) * 1250) \times ,17 \\
& +(51250 - (204 - 200) * 1250) \times ,09 \\
& +(51250 - (205 - 200) * 1250) \times ,02 \;\; = 49212{,}5 \textit{ euros}
\end{aligned}
$$

Ejercicio:

(a) Si el coste fijo de este vuelo son 20000 euros ¿cuál debería ser la multa para que la empresa no tuviese incentivos para vender más tickets que asientos disponibles?

(b) Si la multa por *overbooking* es 2000 euros por pasajero ¿cuál es el número óptimo (entre 200 y 205) de tickets a vender?

Supuesto de uniformidad

Esperanza de una función de X

Teorema 1.

$$\begin{aligned} E[c] &= c \quad \textit{para una constante } c \\ E[bX] &= bE[X] \\ E[g(X)+h(X)] &= E[g(X)]+E[h(X)] \\ E[a+bX] &= a+bE[X] \end{aligned}$$

Demostración

$$E[c] = \sum_i \Pr(X=x_i)\times c = c\times\sum_i \Pr(X=x_i) = c\times 1 = c$$

$$E[bX] = \sum_i \Pr(X=x_i)\times(bx_i) = b\times\sum_i \Pr(X=x_i)\times x_i = bE[X]$$

Esperanza de una función de X

Demostración (continuación)

$$\begin{aligned} E[g(X)+h(X)] &= \sum_i \Pr(X=x_i)\times(g(x_i)+h(x_i)) \\ &= \sum_i \Pr(X=x_i)\times g(x_i)+\sum_i \Pr(X=x_i)\times h(x_i) \\ &= E[g(X)]+E[h(X)] \end{aligned}$$

Ejercicio: Pruebe el cuarto resultado del Teorema 1.

Ejemplo 8. *Volvemos al ejemplo 2. Supongamos que cada pasajero que se presenta al aeropuerto compra una bebida por 2 euros. Calcular los ingresos por este concepto.*

Queremos calcular $E[2X]=2\times E[X]=2\times 201{,}44=402{,}88$ *euros.*

Varianza y desviación típica

Recordamos que la varianza y la desviación típica muestral son medidas de la desviación de los datos en torno a la media. Podemos definir de manera semejante estas medidas para una variable.

Definición 6. *La* **varianza** *de una variable X que tiene media $E[X] = \mu$ es*

$$V[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_i \Pr(X = x_i) \times (x_i - \mu)^2.$$

La **desviación típica** *es $DT[X] = \sqrt{V[X]}$.*

Ejemplo 9. *Retomamos el Ejemplo 1, sobre los dados. Tenemos*

$$V[X] \quad = \quad \frac{1}{36} \times (2-7)^2 + \frac{2}{36} \times (3-7)^2 + \ldots + \frac{1}{36} \times (12-7)^2 \approx 6{,}389$$

La desviación típica es $DT[X] = \sqrt{6{,}389} \approx 2{,}53$.

Varianza y desviación típica

Teorema 2. *La varianza de X es*

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= \sum_i \Pr(X = x_i) \times x_i^2 - E[X]^2 \end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\ &= E\left[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 10. *En el Ejemplo 2,*

$$\begin{aligned} E[X^2] &= ,05 \times 198^2 + \ldots + ,02 \times 205^2 \ = 40580{,}88 \\ \sigma^2 &= E[X^2] - \mu^2 = 40580{,}88 - 201{,}44^2 \ = 2{,}8064 \end{aligned}$$

Luego la desviación típica es $\sigma \approx 1{,}675$ pasajeros.

Tema 6 Variables aleatorias unidimensionales

- Concepto de variable aleatoria. ✓

- Variables discretas. ✓

  - La función de masa (de probabilidad) y sus propiedades.
  - La función de distribución y sus propiedades.
  - La esperanza, varianza y desviación típica.

- $\boxed{\text{Variables continuas}}$.

  - Funciones de distribución y densidad.
  - Momentos de variables continuas.

- Transformaciones.

- Media y varianza de una transformación lineal.

Función de distribución de una v.a. continua

Si tenemos una variable continua, X, que toma valores en un intervalo real, podemos definir la función de distribución de la misma manera que para una variable discreta:

$$F(x) = \Pr(X \leq x).$$

- $F(x)$ será una función suave (continua) y no de tipo escalón, pero tendrá las mismas propiedades que la función de distribución para una variable discreta:

- Propiedades:

  1. $F(-\infty) = 0$
  2. $F(\infty) = 1$
  3. Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$.
  4. $F(x)$ es una función continua.

En v.a. discretas solo es continua por la derecha:
$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x + \varepsilon) = F(x)$.

Función de distribución de una v.a. continua

Ejemplo 11. *¿Cuáles de las siguientes funciones pueden ser funciones de distribución para una variable continua X?*

1. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

2. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -1 \\ \frac{x}{2} & \text{para } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

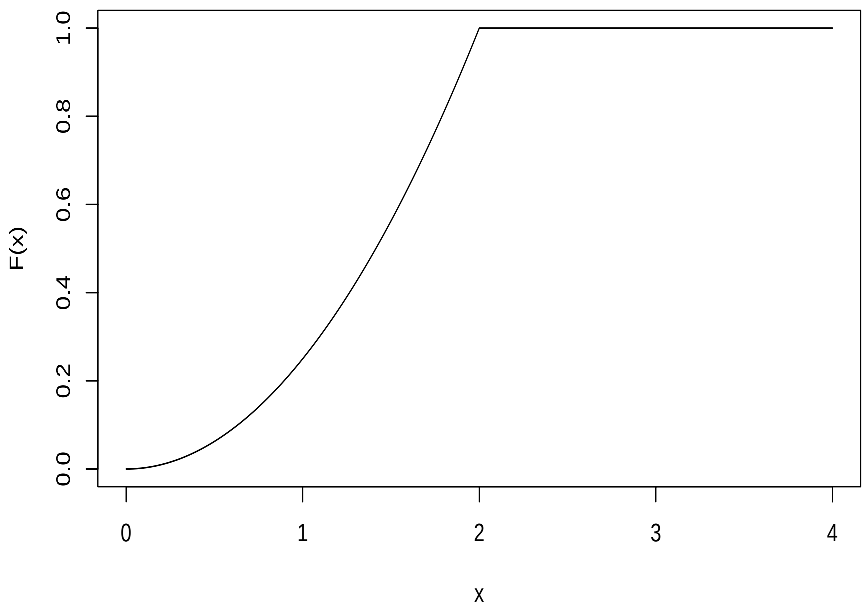
3. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{para } 0 < x < \infty \end{cases}$$

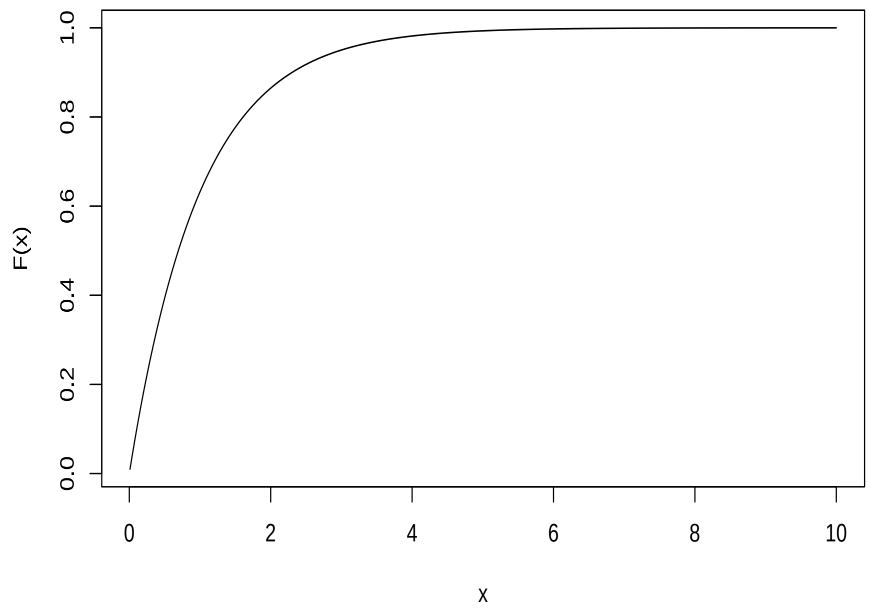
Funciones 1 y 3 pueden ser funciones de distribución.

La función 2 es negativa en el rango $-1 < x < 0$.

1) $F(x) = \dfrac{x^2}{4}$.

3) $F(x) = 1 - e^{-x}$.





$\boxed{\text{¿}\Pr(X = x_0) \text{ cuando } X \text{ es una v.a. continua?}}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Pr(X \leq x_0 + \varepsilon) - \Pr(X \leq x_0) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Pr(x_0 < X \leq x_0 + \varepsilon) = \text{?}
\end{aligned}
$$

Función de densidad de una v.a. continua

- Para una variable continua, la función de probabilidad no tiene sentido pues $\Pr(X = x) = 0$ para todo x.
- No obstante, se define otra función con propiedades semejantes:

Definición 7. *Para una variable continua X con función de distribución $F(x)$, la* **función de densidad** *de X es*

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Las propiedades de la función de densidad son:

- $f(x) \geq 0$ para todo x.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$.
- $\Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Función de densidad de una v.a. continua

Ejemplo 12. *Volvemos al Ejemplo 11 y calculamos las funciones de densidad en casos 1 y 3.*

1.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}\right) \\
&= \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} \\
f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{para } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}
\end{aligned}
$$

3.

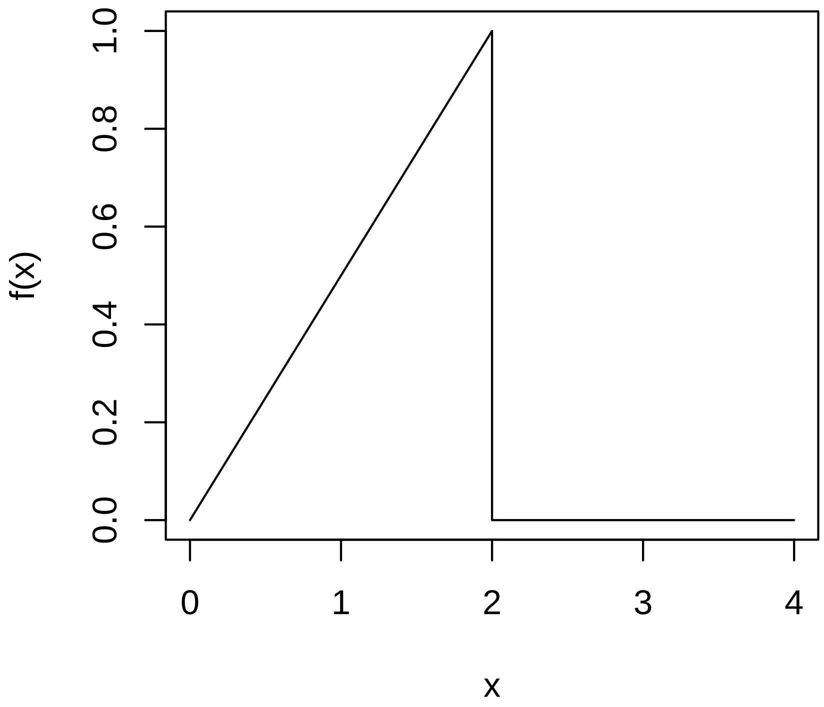
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-x}\right) \\
&= e^{-x} \\
f(x) &= \begin{cases} e^{-x} & \text{para } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{si no} \end{cases}
\end{aligned}
$$

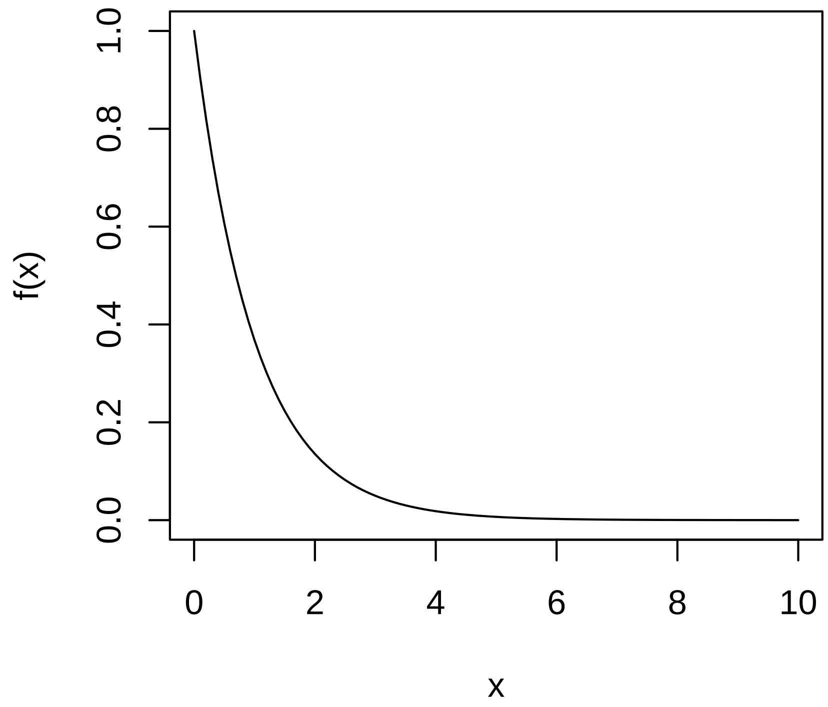
1) $F(x) = \frac{x^2}{4}$.

3) $F(x) = 1 - e^{-x}$.

1) $f(x) = \frac{x}{2}$.

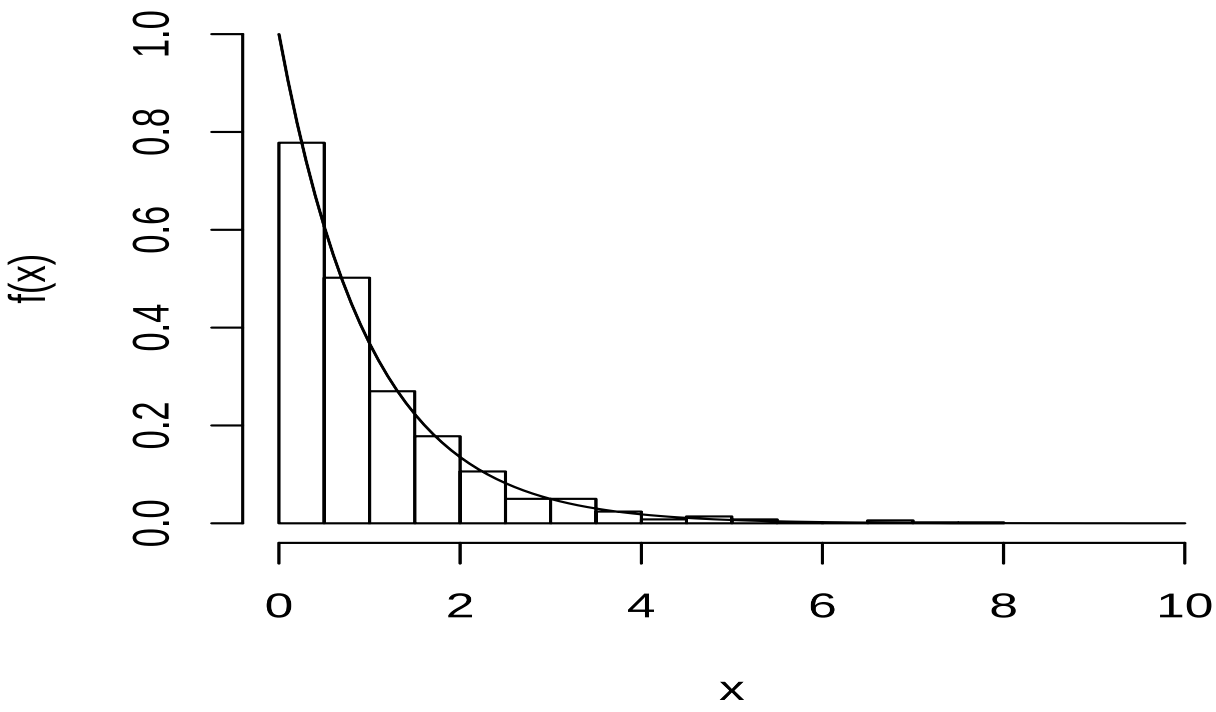
3) $f(x) = e^{-x}$.





Interpretación de la función de densidad

Pensamos en tomar una muestra muy grande y hacer un histograma de los datos con la área normalizada a 1.



Se ve que el histograma es similar a la función de densidad.

Ejemplo - Funciones de densidad y distribución

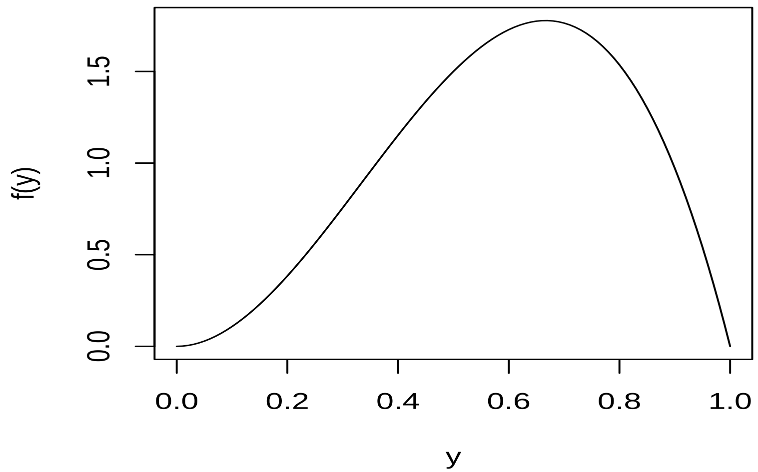
Ejemplo 13. *Una variable aleatoria Y tiene la función de densidad*

$$f(y) = \begin{cases} cy^2(1-y) & \textit{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \textit{si no} \end{cases}$$

a) *¿Cuál es el valor de c?*

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = \int_0^1 cy^2(1-y)\,dy \\ &= c\int_0^1 \left(y^2 - y^3\right)\,dy = c\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 \\ &= c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{c}{12} \\ &\Downarrow \\ c &= 12 \end{aligned}$$

b) Dibuje y describa la función de densidad.



Es asimétrica a la izquierda.

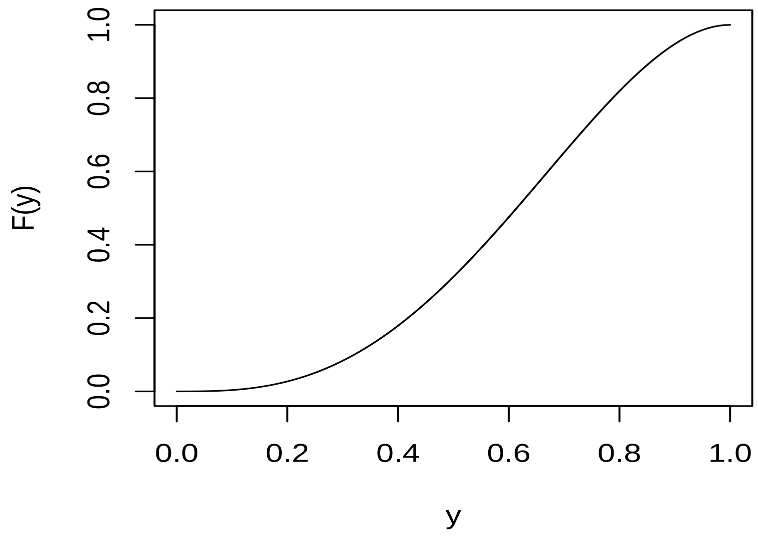
c) Halle la función de distribución.

Sea $0 < y < 1$.

$$
\begin{aligned}
F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(y)\,dy = \int_{0}^{y} 12u^2(1-u)\,du \\
&= \left[12\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4}\right)\right]_0^y = 12\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
F(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 12\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}
$$

d) Dibuje la función de distribución.



e) Calcule $\Pr(Y \leq 0{,}5)$

$$\Pr(Y \leq 0{,}5) = F(0{,}5) = 12\left(\frac{0{,}5^3}{3} - \frac{0{,}5^4}{4}\right) = {,}3125$$

f) Calcule $\Pr(0{,}2 < Y \leq 0{,}5)$

$$\Pr(0{,}2 < Y \leq 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}2) = {,}3125\ -\ {,}0272 = {,}2853$$

Momentos de v.a. continuas

Recordamos las fórmulas para la media y varianza de una variable discreta:

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_i \Pr(X = x_i) \times x_i \\ \sigma^2 &= \sum_i \Pr(X = x_i) \times (x_i - \mu)^2\end{aligned}$$

En el caso de una variable aleatoria continua, la función de densidad juega el papel de la función de probabilidad y se integra en lugar de sumar.

Definición 8. *Si X es una variable continua con función de densidad $f(x)$ entonces, la media de X es*

$$E[X] = \int f(x) \times x \, dx,$$

la varianza de X es $$V[X] = \int f(x) \times (x - E[X])^2 \, dx,$$

y la desviación típica es $DT[X] = \sqrt{V[X]}$.

Momentos de v.a. continuas

- Igual que con variables discretas, se usan los símbolos μ y σ para representar la media y desviación típica respectivamente.

- Se tiene un resultado análogo al Teorema 2:

$$V[X] \quad = \quad E\left[X^2\right] - E[X]^2 = \int f(x) \times x^2 \, dx - \mu^2$$

- Las expresiones derivadas para variables discretas son válidas para variables continuas, sustituyendo integración por sumación.

- A las medidas, $E[X^p]$, se les llama **momentos de orden p** de X:
  - La media es el momento de orden 1.
  - En el cálculo de la varianza interviene el momento de orden 2, $E[X^2]$.

Ejemplo - Media y varianza

Ejemplo 14. *Calculamos la media, varianza y desviación típica para la variable del Ejemplo 13.*

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_0^1 12y^2(1-y)\times y\,dy = \int_0^1 12y^3(1-y)\,dy \\
&= 12\int_0^1 \left(y^3-y^4\right)\,dy = \left[12\left(\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}\right)\right]_0^1 = 12\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = \boxed{0.6} \\
E\left[Y^2\right] &= \int_0^1 12y^2(1-y)\times y^2\,dy = \int_0^1 12y^4(1-y)\,dy \\
&= 12\int_0^1 \left(y^4-y^5\right)\,dy = \left[12\left(\frac{y^5}{5}-\frac{y^6}{6}\right)\right]_0^1 = 12\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) = 0{,}4 \\
\sigma^2 &= E\left[Y^2\right]-\mu^2 = 0{,}4-0{,}6^2 = \boxed{0.04} \\
\sigma &= \boxed{0.2}
\end{aligned}
$$

Otras medidas

- El coeficiente de variación de una variable con media μ y desviación típica σ es $\frac{|\mu|}{\sigma}$.
- El coeficiente de asimetría es $\frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3}$.
- El coeficiente de kurtosis es $\frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4}$.

Definición 9. *Para una variable continua X con función acumulada de distribución $F(x)$, la* **mediana** *es el punto M donde $F(M) = 0{,}5$.*

▶ Si la densidad de X es $f(x)$, se tiene $\int_{-\infty}^{M} f(x)\, dx = 0{,}5$.

▶ El primer cuartíl es el punto Q_1 donde $F(Q_1) = \frac{1}{4}$ y el tercer cuartíl es el punto Q_3 donde $F(Q_3) = \frac{3}{4}$.

▶ Si X es una variable discreta, entonces, la mediana es el punto mínimo M donde $F(M) \geq 0{,}5$.

Ejemplo - Mediana y Cuartiles

Ejemplo 15. *Volvemos al caso 1 del Ejemplo 11. En este caso, la función de distribución es:* $F(x) = \frac{x^2}{4}$ *y la mediana es el punto* M *tal que*

$$\begin{aligned} F(M) &= \frac{1}{2} \\ \frac{M^2}{4} &= \frac{1}{2} \\ M &= \sqrt{2} \approx 1{,}414. \end{aligned}$$

Análogamente, los cuartiles son:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^2}{4} &= \frac{1}{4} \\ Q_1 &= 1 \\ \frac{Q_3^2}{4} &= \frac{3}{4} \\ Q_3 &= \sqrt{3} \approx 1{,}73 \end{aligned}$$

Tema 6 Variables aleatorias unidimensionales

- Concepto de variable aleatoria. ✓
- Variables discretas. ✓
  - La función de masa (de probabilidad) y sus propiedades.
  - La función de distribución y sus propiedades.
  - La esperanza, varianza y desviación típica.
- Variables continuas. ✓
  - Funciones de distribución y densidad.
  - Momentos de variables continuas.
- Transformaciones.
- Media y varianza de una transformación lineal.

Transformaciones de variables

Si X es una variable discreta e $Y = g(X)$ es una transformación, se calcula la función de probabilidad de Y mediante

$$\Pr(Y = y) = \Pr(g(X) = y) = \Pr(X = g^{-1}(y)).$$

- Si g es una función biyectiva el cálculo es sencillo, pues existirá un único x tal que $y = g(x)$ o equivalentemente $x = g^{-1}(y)$.

  Por ejemplo, $g(x) = \exp(x)$.

- Si g **no** es una función biyectiva entonces tendremos que obtener todas las soluciones de $g(x) = y$.

  Por ejemplo, si X toma valores en $\mathbb{Z}$ y $g(x) = x^2$ entonces tendremos que $x = \sqrt{y}$ y $x = -\sqrt{y}$ que son soluciones de $x^2 = y$.

Transformaciones de variables

- Si X es una variable continua e $Y = g(X)$ es una transformación **monótona creciente**, se calcula la función de distribución de Y mediante

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(g(X) \leq y) = \Pr(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

- Si X es una variable continua e $Y = g(X)$ es una transformación **monótona decreciente**, se calcula la función de distribución de Y mediante

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(g(X) \leq y) = \Pr(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

- De las expresiones anteriores se puede obtener la función de densidad de Y.

Ejemplo 16. *Sea* $Y = \exp(X)$, *entonces:*

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(\exp(X) \leq y) = \Pr(X \leq \log(y)) = F_X(\log(y)),$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_X(\log(y))}{dy} = f_X(\log(y))\frac{1}{y}.$$

Transformación lineal

Sea $Y = a + bX$ una transformación lineal. Su función de distribución es:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(a + bX \leq y) \\ &= P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) \quad \text{si } b > 0 \\ &= F_X\left(\frac{y-a}{b}\right). \end{aligned}$$

La media y la desviación típica de Y son:

$$\begin{aligned} E[Y] &= a + b\,E[X], \\ DT[Y] &= b\,DT[X]. \end{aligned}$$

Transformación lineal

- La transformación lineal más utilizada es:

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}.$$

- En tal caso se tiene que $a = -\frac{\mu_X}{\sigma_X}$ y $b = \frac{1}{\sigma_X}$ y por tanto

$$E[Y] = 0 \ \text{ y } \ DT[Y] = 1.$$

- La variable Y se denomina variable tipificada.

Ejemplo - Transformación lineal

Ejemplo 17. *(Examen de septiembre 2003) Un asesor financiero ha estimado que las ventas y los costes de algunos productos están relacionados con un índice I a través de las siguientes relaciones:*

$$\text{Costes: } C = \frac{I+5}{7}; \qquad \text{Ventas: } V = \frac{25-I}{4}.$$

Si el índice I es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{108}, & 3 \leq x \leq 15, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) *Calcular la función de distribución del índice I.*
b) *Calcular las medias y varianzas de los costes, las ventas y los beneficios.*
c) *Calcular la probabilidad de que el beneficio sea negativo.*

a) Sea $3 \leq x \leq 15$.

$$F(x) = \int_3^x \frac{u}{108}\, du = \left[\frac{u^2}{216}\right]_3^x = \frac{x^2-9}{216}$$

Por tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ \frac{x^2-9}{216} & \text{si } 3 \leq x \leq 15 \\ 1 & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

b) En primer lugar, calculamos la media y varianza de X:

$$E[X] = \int_3^{15} \frac{x}{108} \times x\, dx = \int_3^{15} \frac{x^2}{108}\, dx = \left[\frac{x^3}{324}\right]_3^{15} = \frac{15^3-3^3}{324} = 10{,}3\dot{3}$$

$$E\left[X^2\right] = \int_3^{15} \frac{x^3}{108}\, dx = \left[\frac{x^4}{432}\right]_3^{15} = 117$$

$$V[X] = 117 - 10{,}3\dot{3}^2 = \frac{92}{9} = 10{,}2\dot{2}$$

b) Para los costes tenemos

$$E[C] = E\left[\frac{I+5}{7}\right] = \frac{1}{7}E[I] + \frac{5}{7} = \frac{1}{7} \times \frac{31}{3} + \frac{5}{7} \approx 2{,}190$$

$$V[C] = \left(\frac{1}{7}\right)^2 V[I] = \frac{92}{441} \approx {,}209$$

Para las ventas,

$$E[V] = E\left[\frac{25-I}{4}\right] = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}E[I] = 3{,}6\dot{6}$$

$$V[V] = \frac{1}{16}V[I] = {,}63\dot{8}$$

Los beneficios (B) son $B = V - C = \frac{25-I}{4} - \frac{I+5}{7} = \frac{155-11I}{28}$,

$$E[B] = E[V] - E[C] = \frac{11}{3} - \frac{46}{21} = \frac{31}{21} \approx 1{,}48$$

$$V[B] = V\left[\frac{155-11I}{28}\right] = \left(\frac{11}{28}\right)^2 V[I] \approx 1{,}58$$

c)

$$
\begin{aligned}
\Pr(B < 0) &= P\left(\frac{155 - 11I}{28} < 0\right) \\
&= P\left(I > \frac{155}{11}\right) \\
&= 1 - P\left(I \leq \frac{155}{11}\right) \\
&= 1 - F(14.\dot{0}\dot{9}) \\
&= 1 - \frac{14.\dot{0}\dot{9}^2 - 9}{216} \approx 0{,}122
\end{aligned}
$$

Recapitulación

Tema 6. Variables aleatorias unidimensionales

- Concepto de variable aleatoria.

$\Lleftarrow$ Concepto clave en probabilidad

- Variables discretas.
  - La función de masa (de probabilidad) y sus propiedades.
  - La función de distribución y sus propiedades.
  - La esperanza, varianza y desviación típica.
- Variables continuas.
  - Funciones de distribución y densidad.
  - Momentos de variables continuas.

$\Lleftarrow$ Tipos de variables y su caracterización

- Transformaciones.
- Media y varianza de una transformación lineal.

$\Lleftarrow$ Transformaciones y su caracterización

Tema 6. Variables aleatorias unidimensionales

- Distribución.
- Características: media, varianza, etc.
- Transformaciones.

V.A. de uso frecuente

Tema 7. Modelos probabilísticos discretos

- Bernoulli, binomial, hipergeométrica, Poisson, etcétera.

Tema 8. Modelos probabilísticos continuos

- Uniforme, exponencial, Pareto, Normal, etcétera.