Técnicas de Inferencia Estadística II

Primera prueba parcial

Alumno: ______________________________________

Grupo: _________ Fecha: ______________

Ejercicio 1. Un estudio sobre el efecto de la cafeína en el metabolismo muscular utilizó dieciocho voluntarios varones a los que se les realizaron pruebas de ejercicio en los brazos. Nueve de los hombres fueron seleccionados al azar para tomar una cápsula que contenía cafeína pura una hora antes de la prueba. Los otros hombres recibieron una cápsula de placebo. Durante cada ejercicio se midió la relación de intercambio respiratorio (RER) del sujeto. RER es la relación de CO2 producido a O2 consumido y es un indicador de si la energía se obtiene de carbohidratos o grasas. La pregunta de interés para el experimentador fue si, en promedio, la cafeína cambia el RER. La tabla siguiente muestra los datos:

RER(%)	
Placebo (V1)	**Cafeína (V2)**
105	96
119	99
100	94
97	89
96	96
101	93
94	88
95	105
98	88

a) Realice un contraste de igualdad de medias del indicador RER entre las personas que reciben cafeína y las que reciben placebo. Plantee las hipótesis nula y alternativa, así como los supuestos necesarios para garantizar la validez del contraste. Utilice α=0.05. Calcule e interprete el p-valor. (2 puntos)

El contraste pedido es $\begin{matrix} H_0: \mu_P = \mu_C \\ H_1: \mu_P \neq \mu_C \end{matrix}$ donde μ_P es la media del indicador en personas que reciben placebo y μ_C en las que reciben una cápsula de cafeína.

Los supuestos necesarios para realizar este contraste son: (i) independencia de las muestras y observaciones; (ii) los indicadores en ambos grupos se distribuyen normales. Notar que el número de individuos en cada grupo es 9, por tanto, muy inferior a 30.

El contraste en R sería:

```
> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "two.sided", paired = FALSE,
                                                              var.equal = FALSE)

  Welch Two Sample t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 1.9948, df = 14.624, p-value = 0.06505
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.4490961 13.1157627
```

Por tanto, el p-valor = 0.06505 > α=0.05 y no rechazaríamos la hipótesis nula, esto es, no hay evidencia suficiente en contra de la igualdad de medias del indicador en los dos grupos.

b) Podría ocurrir que el investigador solo esté interesado en saber si la 'cafeína reduce el RER'. Realice el contraste unilateral correspondiente. Plantee las hipótesis nula y alternativa, así como los supuestos necesarios para garantizar la validez del contraste. Utilice α=0.05. Calcule e interprete el p-valor. (2 puntos)

En este apartado, nos piden el contraste $\begin{matrix} H_0: \mu_P = \mu_C \\ H_1: \mu_P > \mu_C \end{matrix}$, donde μ_P y μ_C tienen el mismo significado que en el apartado a). Los supuestos necesarios son los mismos que en a).

El contraste en R sería:

```
> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "greater", paired = FALSE,
                                                          var.equal = FALSE)

  Welch Two Sample t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 1.9948, df = 14.624, p-value = 0.03252
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 0.7580791       Inf
```

Por tanto, el p-valor = 0.03252 < α=0.05 y rechazaríamos la hipótesis nula, esto es, concluiríamos que la cafeína reduce el RER.

c) Realice el contraste de igualdad de varianzas. Plantee las hipótesis nula y alternativa, así como los supuestos necesarios para garantizar la validez del contraste. Utilice α=0.05. Calcule e interprete el p-valor. (1 punto)

El contraste pedido es $\begin{matrix} H_0: \sigma_P^2 = \sigma_C^2 \\ H_1: \sigma_P^2 \neq \sigma_C^2 \end{matrix}$ donde σ_P^2 es la varianza del grupo que recibe placebo y σ_C^2 es la varianza del grupo que recibe cafeína.

Los supuestos necesarios para realizar este contraste: (i) independencia de las muestras y observaciones; (ii) los indicadores deben distribuirse normales. Notar que estamos contrastando varianzas y por tanto el supuesto de normalidad no puede eludirse independientemente de los tamaños de las muestras.

El contraste en R sería:

```
> var.test(DataRER$V1,DataRER$V2)

  F test to compare two variances

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
F = 1.8852, num df = 8, denom df = 8, p-value = 0.3886
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.4252309 8.3573998
```

Por tanto, el p-valor = 0.3886 > α=0.05 y no rechazaríamos la hipótesis nula, esto es, no hay evidencia suficiente en contra de la igualdad de varianzas.

NOTA: *No es necesario realizar los apartados a) y b) suponiendo que las varianzas son iguales. Recordad que hay estudios que concluyen que utilizar el procedimiento del contraste de Welsh es preferible a un procedimiento donde se realizan dos contrastes, es decir, primero el contraste de varianzas y a continuación un contraste de medias que tenga en cuenta el resultado del contraste de varianzas.*

Ejercicio 2. Se desea contrastar si la media de los tiempos de ejecución de una tarea disminuye con la experiencia del trabajador/a. Para ello se toma una muestra al azar de n=20 trabajadores/as recién contratados/as se miden sus tiempos y tras un año de contrato se vuelven a medir los tiempos. El contraste a realizar es:

$$H_0: \mu_N = \mu_E$$
$$H_0: \mu_N > \mu_E\text{'}$$

donde μ_N es la media de los tiempos en trabajadores/as noveles y μ_E en trabajadores/as con una experiencia de un año.

a) Se proponen las siguientes regiones para realizar el contraste anterior:

   i. $R_1 = \left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} > k_1\right\}$, donde $\bar{X}$ es la media en la muestra de trabajadores/as al inicio del contrato, $\bar{Y}$ es la media en la muestra de trabajadores/as tras un año de experiencia y S_D^2 es la cuasi-varianza de la diferencia entre los tiempos al principio y tras un año de experiencia, es decir, $D = X - Y$.

   ii. $R_2 = \left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} < k_2\right\}$, con $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y S_D^2 como en la región R_1.

   Obtenga k_1 y k_2 tales que las regiones tengan un tamaño igual a α. (1 punto)

Lo que nos piden es calcular k_1 tal que se cumpla:

$$\Pr\{R_1|H_0\} = \Pr\left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} > k_1|H_0\right\} = \alpha.$$

Sabemos que, bajo los supuestos de independencia de los individuos, normalidad de los tiempos de ejecución y teniendo en cuenta que al mismo individuo se le mide al principio y al final (muestras pareadas), podemos decir que $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}$ se distribuye como una $t_{n-1} = t_{19}$.

Por tanto, si tomamos $k_1 = t_{19,\alpha}$ sabemos que cumple la condición del tamaño.

Con los mismos argumentos, llegaremos a que $k_2 = -t_{19,\alpha}$.

b) ¿Cuál de las dos regiones tiene una mayor potencia? Justifique su respuesta. (2 puntos)

Tenemos que calcular la potencia de cada una de las regiones:

$$\Pr\{R_1|H_1\} = \Pr\left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} > t_{19,\alpha}|H_1\right\} = \Pr\left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} - \frac{\mu_N-\mu_E}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} > t_{19,\alpha} - \frac{\mu_N-\mu_E}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}|H_1\right\},$$

Donde hemos restado $\frac{\mu_N-\mu_E}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}$ para que la expresión a la izquierda tenga una distribución conocida (t_{19}). Por otra parte, debemos darnos cuenta que la diferencia $\mu_N - \mu_E$ es positiva bajo H_1 y, por tanto, $t_{19,\alpha} - \frac{\mu_N-\mu_E}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}$ es menor que $t_{19,\alpha}$. Mientras mayor sea la diferencia $\mu_N - \mu_E$ menor será la parte derecha de la desigualdad, por tanto, tenemos que la potencia empieza en α y va creciendo hasta 1 cuando la diferencia tiende a $+\infty$.

El mismo argumento nos lleva a concluir que la potencia de la región R_2 empieza en α y va disminuyendo hasta 0 cuando la diferencia tiende a $+\infty$.

Debemos notar que en R_1 tenemos $\Pr\{t_{19} > t_{19,\alpha} - Dif\}$ mientras que en R_2 tenemos $\Pr\{t_{19} < -t_{19,\alpha} - Dif\}$.

Ejercicio 3. Se realiza un estudio para comprobar si el colesterol (LDL) se redujo después de usar una determinada marca de margarina como parte de una dieta baja en grasas y colesterol. En el archivo <Cholesterol.csv> tenemos los datos de 18 individuos que han hecho la dieta durante 8 semanas.

La siguiente salida de R muestra la lectura y un resumen estadístico básico:

```
> LDL <- read.table("Cholesterol.csv", header = TRUE, dec = ".", sep = ",")
> summary(LDL)
       ID             Antes          Despues4         Despues8       Margarina
 Min.   : 1.00   Min.   :3.910   Min.   :3.700   Min.   :3.660   A:9
 1st Qu.: 5.25   1st Qu.:5.740   1st Qu.:5.175   1st Qu.:5.210   B:9
 Median : 9.50   Median :6.500   Median :5.830   Median :5.730
 Mean   : 9.50   Mean   :6.408   Mean   :5.842   Mean   :5.779
 3rd Qu.:13.75   3rd Qu.:7.218   3rd Qu.:6.730   3rd Qu.:6.688
 Max.   :18.00   Max.   :8.430   Max.   :7.710   Max.   :7.670
```

Donde `ID` es un identificador, `Antes` corresponde al nivel de LDL antes de la dieta, `Despues4` y `Despues8` a los niveles después de 4 y 8 semanas y `Margarina` al tipo de margarina consumida.

a) Si los niveles de LDL son superiores a 4,9 mmol/l se considera que el nivel del colesterol es muy alto. Contraste si la media del nivel de LDL, después de 8 semanas, es superior a 4,9 mmol/l. Plantee las hipótesis nula y alternativa, así como los supuestos necesarios para garantizar la validez del contraste. Utilice α=0.05. Calcule e interprete el p-valor. (2 puntos)

El contraste que nos piden es $\begin{array}{l} H_0: \mu_{D8} = 4{,}9 \\ H_1: \mu_{D8} > 4{,}9 \end{array}$, donde μ_{D8} es la media del nivel de colesterol después de 8 semanas.

Los supuestos que necesitamos son (i) independencia entre los individuos y (ii) los niveles de colesterol deben seguir la misma distribución normal.

El contraste en R sería:

```
> t.test(LDL$Despues8, alternative = "greater", mu = 4.9)

  One Sample t-test

data:  LDL$Despues8
t = 3.3839, df = 17, p-value = 0.001764
alternative hypothesis: true mean is greater than 4.9
95 percent confidence interval:
 5.327073      Inf
```

Por tanto, el p-valor = 0.001764 < α=0.05 y rechazaríamos la hipótesis nula, esto es, el nivel medio de colesterol después de 8 semanas es superior a 4,9.

NOTA 1: Fijaos en que ponemos `mu = 4.9` en la instrucción `t.test`.

NOTA 2: Hay que darse cuenta que el contraste que se pide es sobre el nivel de colesterol después de 8 semanas no sobre si la dieta reduce el nivel de colesterol en 8 semanas.

ANEXOS del Ejercicio 1.

```
> DataRER <- read.table("rer.csv",sep=",")

> mean(DataRER$V1)
[1] 100.5556
> mean(DataRER$V2)
[1] 94.22222
> sd(DataRER$V1)
[1] 7.699206
> sd(DataRER$V2)
[1] 5.607535
> cov(DataRER)
         V1       V2
V1 59.27778 12.86111
V2 12.86111 31.44444

> var.test(DataRER$V1,DataRER$V2)

        F test to compare two variances

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
F = 1.8852, num df = 8, denom df = 8, p-value = 0.3886
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.4252309 8.3573998

> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "two.sided", paired = TRUE)

        Paired t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 2.3567, df = 8, p-value = 0.0462
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  0.1361334 12.5305332

> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "two.sided", paired = FALSE, var.equal = FALSE)

        Welch Two Sample t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 1.9948, df = 14.624, p-value = 0.06505
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.4490961 13.1157627

> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "two.sided", paired = FALSE, var.equal = TRUE)

        Two Sample t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 1.9948, df = 16, p-value = 0.06339
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3972398 13.0639064


> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "less", paired = TRUE)

        Paired t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 2.3567, df = 8, p-value = 0.9769
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
     -Inf 11.33072

> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "less", paired = FALSE, var.equal = FALSE)

        Welch Two Sample t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 1.9948, df = 14.624, p-value = 0.9675
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
     -Inf 11.90859
```

```
> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "less", paired = FALSE, var.equal = TRUE)

        Two Sample t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 1.9948, df = 16, p-value = 0.9683
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
     -Inf 11.87641

> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "greater", paired = TRUE)

        Paired t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 2.3567, df = 8, p-value = 0.0231
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 1.335948      Inf

> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "greater", paired = FALSE, var.equal = FALSE)

        Welch Two Sample t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 1.9948, df = 14.624, p-value = 0.03252
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 0.7580791       Inf

> t.test(DataRER$V1, DataRER$V2, alternative = "greater", paired = FALSE, var.equal = TRUE)

        Two Sample t-test

data:  DataRER$V1 and DataRER$V2
t = 1.9948, df = 16, p-value = 0.03169
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 0.7902566       Inf
```

ANEXOS del Ejercicio 3.

```
> mean(LDL$Despues8-LDL$Antes)
[1] -0.6288889
> mean(LDL$Antes)
[1] 6.407778
> sd(LDL$Despues8)
[1] 1.101912
```

```
> mean(LDL$Despues8)
[1] 5.778889
> sd(LDL$Despues8-LDL$Antes)
[1] 0.1785197
> sd(LDL$Antes)
[1] 1.191087
```

```
> t.test(LDL$Despues8, alternative = "greater")

        One Sample t-test

data:  LDL$Despues8
t = 22.25, df = 17, p-value = 2.602e-14
alternative hypothesis: true mean is greater than 0
95 percent confidence interval:
 5.327073      Inf

> t.test(LDL$Despues8, alternative = "greater", mu = 4.9)

        One Sample t-test

data:  LDL$Despues8
t = 3.3839, df = 17, p-value = 0.001764
alternative hypothesis: true mean is greater than 4.9
95 percent confidence interval:
 5.327073      Inf

> t.test(LDL$Despues8, alternative = "less")

        One Sample t-test

data:  LDL$Despues8
t = 22.25, df = 17, p-value = 1
alternative hypothesis: true mean is less than 0
95 percent confidence interval:
     -Inf 6.230705
```

```
> t.test(LDL$Despues8, alternative = "less", mu = 4.9)

        One Sample t-test

data:  LDL$Despues8
t = 3.3839, df = 17, p-value = 0.9982
alternative hypothesis: true mean is less than 4.9
95 percent confidence interval:
     -Inf 6.230705

> t.test(LDL$Despues8, LDL$Antes, alternative = "less", paired = TRUE)

        Paired t-test

data:  LDL$Despues8 and LDL$Antes
t = -14.946, df = 17, p-value = 1.639e-11
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
       -Inf -0.5556906

> t.test(LDL$Despues8, LDL$Antes, alternative = "greater", paired = TRUE)

        Paired t-test

data:  LDL$Despues8 and LDL$Antes
t = -14.946, df = 17, p-value = 1
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 -0.7020872        Inf
```