Tema 3. Probabilidad y variables aleatorias

- **Probabilidad**
  - Experimentos aleatorios, espacio muestral, sucesos
  - Interpretaciones de la probabilidad
  - Propiedades de la probabilidad
  - Probabilidad condicionada y teorema de Bayes

- **Variables aleatorias**
  - Concepto de variable aleatoria
  - Variables aleatorias discretas
  - Variables aleatorias continuas
  - Esperanza, varianza y desviación típica

- **Modelos de variables aleatorias**

Conceptos básicos

- **Experimento aleatorio:** proceso de observar un fenómeno cuyos resultados son inciertos

- **Suceso elemental:** un posible resultado de un experimento aleatorio

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

- **Espacio muestral:** la colección de todos los posibles resultados de un experimento

$$\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$$

- **Suceso:** un subconjunto del espacio muestral / un conjunto de sucesos elementales

$$A = \{e_1, e_3\}$$

Conceptos básicos

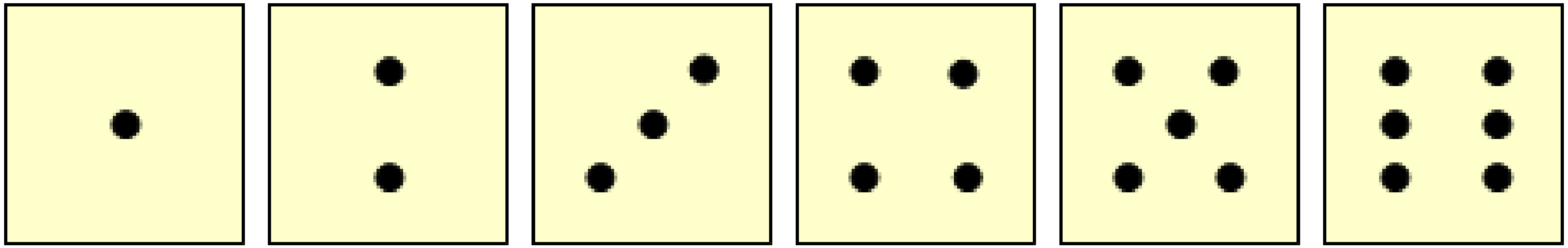
Ejemplos:

- Ejemplo 1: Lanzar un dado
  - Experimento aleatorio $=$
  - Suceso elemental $=$
  - Espacio muestral $=$
  - Suceso $=$

- Ejemplo 2: Precio de la acción x al cierre de sesión el próximo lunes
  - Experimento aleatorio $=$
  - Suceso elemental $=$
  - Espacio muestral $=$
  - Suceso $=$

Ejemplo: dados

- Sea el experimento aleatorio: número que sale al tirar un dado:



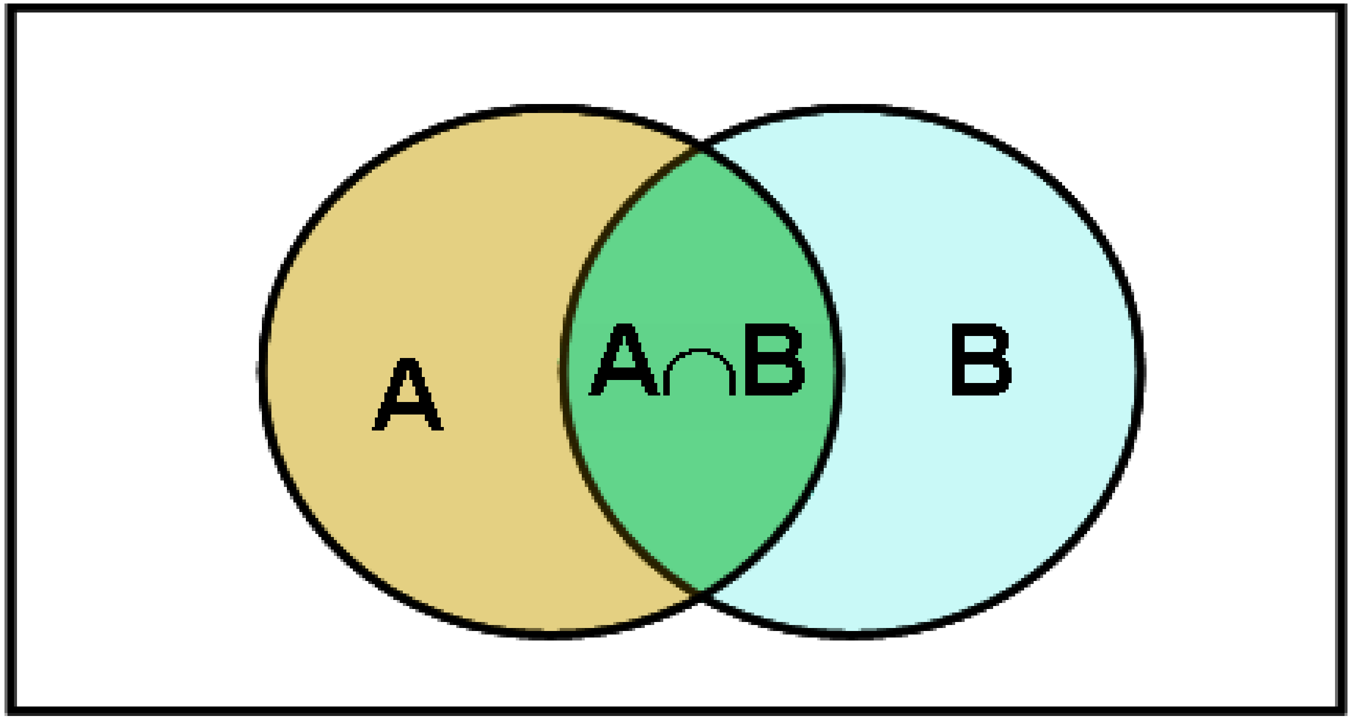
- suceso elemental: el 1, el 2, el 3, el 4, el 5, el 6
- espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- suceso: $A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{4, 5, 6\}$

El suceso A es *sale un número par*

El suceso B es *sale un número mayor que tres*

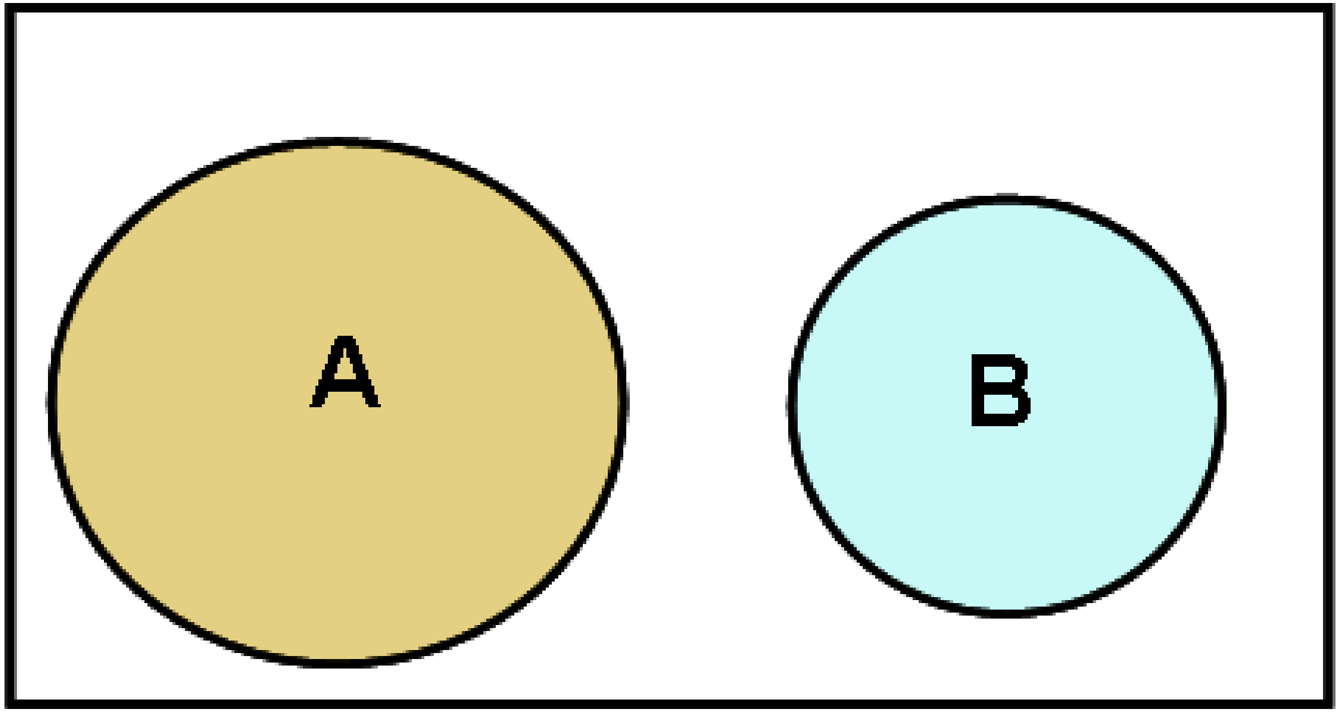
Intersección

Intersección de sucesos: Si A y B son dos sucesos del espacio muestral Ω, entonces la intersección, $A \cap B$, es el conjunto de todos los sucesos de Ω que están en A y en B



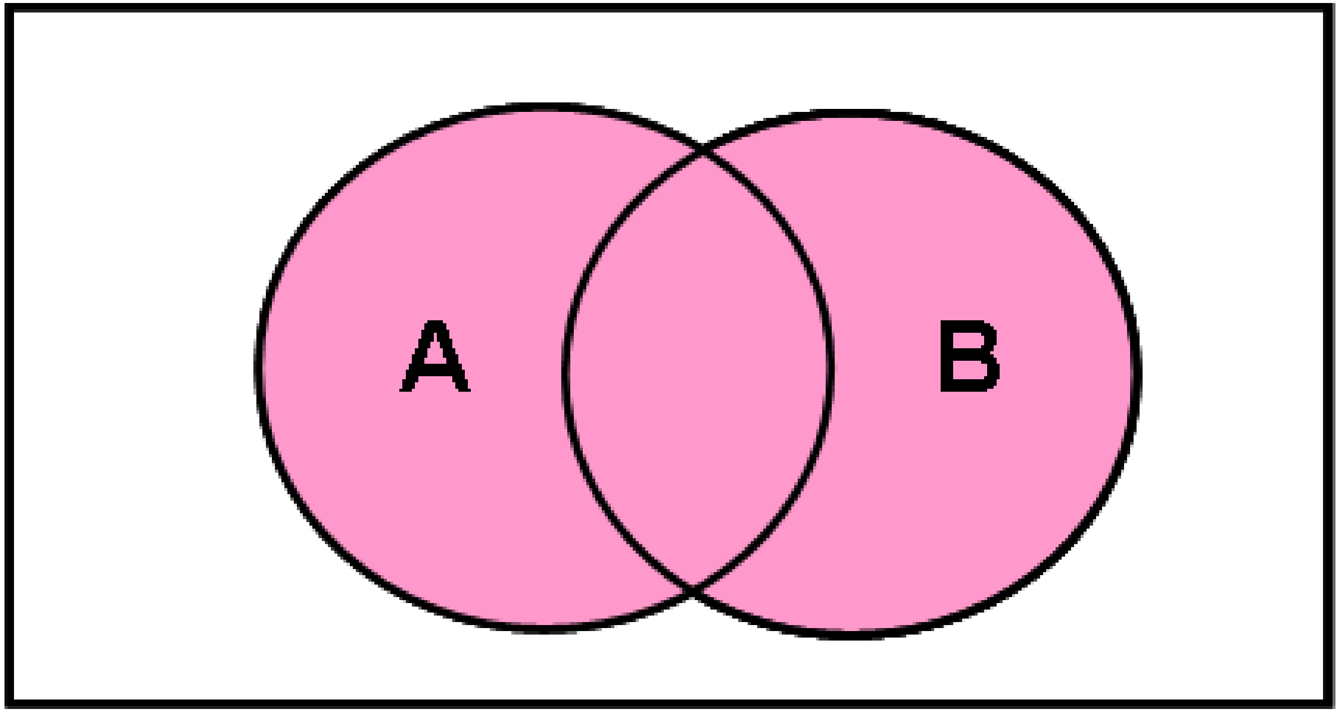
Incompatibles

A y B son **sucesos incompatibles** si no tienen ningún suceso elemental en común i.e., el conjunto $A \cap B$ es vacío



Unión

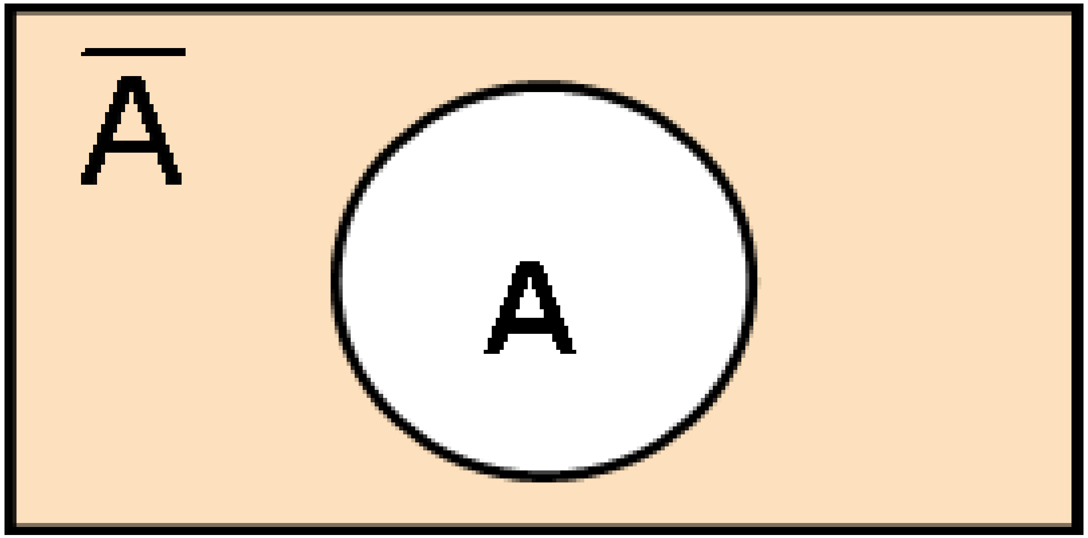
Unión de sucesos: Si A y B son dos sucesos de un espacio muestral Ω, entonces la unión, $A \cup B$, es el conjunto de todos los sucesos de Ω que pertenecen a cualquiera de los dos, A o B



Otros sucesos importantes

- Sucesos triviales:
  - **Suceso seguro** Ω: conjunto $=$ espacio muestral
  - **Suceso imposible** $\emptyset$: conjunto $=$ conjunto vacío

- El suceso **complementario** de un suceso A es el conjunto de todos los sucesos elementales de Ω que no están en A



Ejemplos: dados

Sean

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{4, 5, 6\}$$

- Complementario:

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\} \qquad \bar{B} = \{1, 2, 3\}$$

- Intersección:

$$A \cap B = \{4, 6\} \qquad \bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 3\}$$

- Unión:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2, 4, 5, 6\} \qquad \bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 5\} \\ A \cup \bar{A} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega \end{aligned}$$

- Sucesos incompatibles:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Probabilidad. Intuición

La **probabilidad** es una medida subjetiva sobre la incertidumbre de que ocurra un cierto suceso

- Al tirar un dado ...
  - la probabilidad de que salga un 1 es más pequeña que la probabilidad de que salga un número mayor que uno.
  - la probabilidad de que salga un 4 es igual que la probabilidad de que salga un 6.
  - la probabilidad de que salga un 7 es cero.
  - la probabilidad de que salga un número positivo es uno.

Tres enfoques/interpretaciones

- Probabilidad clásica: Considera un experimento para el que todos los sucesos elementales son **equiprobables**. Si tenemos k sucesos elementales,

$$P(A) = \frac{1}{k} \times \text{tamaño de A}$$

- Enfoque frecuentista: Si repetiéramos el experimento muchas veces, la frecuencia (relativa) con que ocurre el suceso sería una aproximación de la probabilidad

$$\boxed{\text{Probabilidad} = \text{el valor límite de la frecuencia}}$$

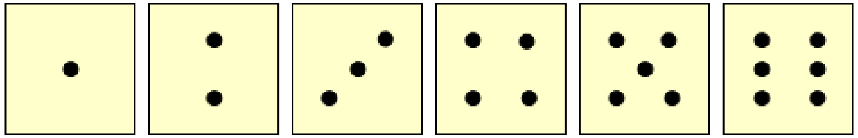
- Probabilidad subjetiva: Depende de la información que tengamos en ese momento

$$\boxed{\text{Probabilidad} = \text{creencia o certeza de que ocurra}}$$

Propiedades de la probabilidad

- Sea A un suceso de Ω, entonces $0 \leq P(A) \leq 1$
- Sea $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, entonces $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i)$
- $P(\Omega) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$
- Complementario: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Adición: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A y B son incompatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ejemplo: dados



- Probabilidad de un suceso elemental: $P(e_i) = \frac{1}{6}$

- Probabilidad de que salga par: $A = \{2, 4, 6\}$, luego

$$P(A) = P(''2'') + P(''4'') + P(''6'') = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

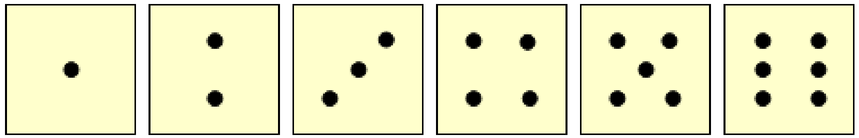
- Probabilidad de que salga mayor que 3: $B = \{4, 5, 6\}$, luego

$$P(B) = P(''4'') + P(''5'') + P(''6'') = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

- Probabilidad de que salga impar

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: dados



- Probabilidad de que salga par o mayor que tres

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como $A \cap B = \{4, 6\}$, entonces $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- Probabilidad de que salga par o igual a uno.

  Los sucesos A y $C = \{1\}$ son incompatibles ($A \cap C = \emptyset$)

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo: probabilidad condicional

Se clasifica un grupo de 100 ejecutivos en acuerdo con su peso y si tienen o no hipertensión. La tabla muestra el número de ejecutivos en cada categoría

	Insuficiente	Normal	Sobrepeso	Total
Hipertenso	2	8	10	20
Normal	20	45	15	80
Total	22	53	25	100

- Si se elige un ejecutivo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga hipertensión?

$$P(H) = \frac{20}{100} = 0,2$$

- Si se elige a una persona al azar, y se descubre que tiene sobrepeso, ¿cuál es la probabilidad de que tenga hipertensión? ¿Es la misma que antes?

Ejemplo: probabilidad condicional

Probabilidad de que sea hipertenso, sabiendo que tiene sobrepeso:

$$P(H|S)$$

Para calcularla, nos centramos sólo en los ejecutivos con sobrepeso:

$$P(H|S) = \frac{10}{25} = 0,4$$

¿Por qué? es como si eligiese la persona al azar sólo entre los que tienen sobrepeso

La **probabilidad condicional** es la probabilidad de que ocurra un evento, dado que otro evento ha ocurrido

Probabilidad condicional

- Sean dos sucesos A y B, la probabilidad condicionada de A dado B es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Ley de la multiplicación:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

- Independencia: Se dice que dos sucesos A y B son **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Además, $P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$

Ejemplos

$\triangleright$ De una baraja de cartas, saco dos cartas. Probabilidad de que ...

- la primera carta sea de copas: $P(A) = \frac{10}{40}$
- la segunda sea copas, sabiendo que la primera lo fue: $P(B|A) = \frac{9}{39}$
- las dos cartas sean de copas: $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{9}{39}\frac{10}{40}$

$\triangleright$ Tiro dos dados. Probabilidad de que ...

- primer dado salga un uno: $P(C) = \frac{1}{6}$
- segundo dado salga un uno, sabiendo el primero salió uno: $P(D|C) = P(D) = \frac{1}{6}$
- primer dado salga un uno, si el segundo salió uno: $P(C|D) = P(C) = \frac{1}{6}$
- los dos dados salgan uno: $P(C \cap D) = P(D)P(C) = \frac{1}{6}\frac{1}{6}$ (sucesos independientes)

Ley de la probabilidad total

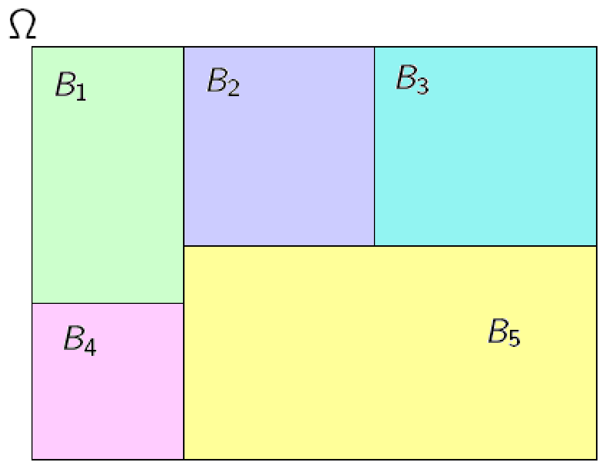
Un conjunto de sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son **mutuamente excluyentes** si

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \qquad \forall i \neq j$$

Si además de eso cumplen

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k,$$

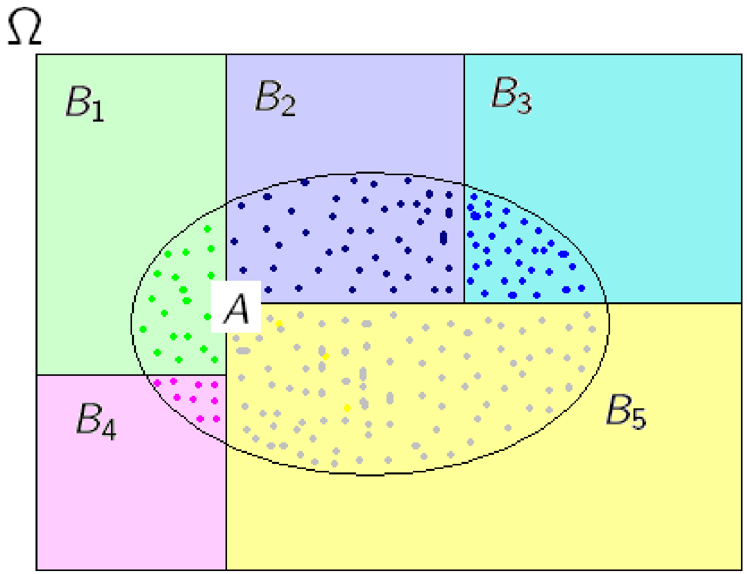
se dice que forman una **partición del espacio muestral**



Ley de probabilidad total

Dada una partición del espacio muestral, $B_1, B_2, \ldots, B_k$, y dado un suceso A, se tiene que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k) = \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)P(B_k) \end{aligned}$$



Ejemplo: probabilidad total

- En una fábrica se embalan galletas en cuatro cadenas de montaje: A1, A2, A3, y A4
- El 35 % de la producción total se embala en la cadena A1, el 20 %, 24 % y 21 % en las cadenas A2, A3 y A4 respectivamente
- Los datos indican que no se embalan correctamente un porcentaje pequeño de las cajas: el 1 % en la cadena de montaje A1, el 3 % en A2, el 2.5 % en A3 y el 2 % en A4
- ¿cuál es la probabilidad de que una caja elegida al azar de la producción total sea defectuosa (suceso D)?

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A_1)P(A_1) + P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3) + P(D|A_4)P(A_4) \\ &= 0,01 \times 0,35 + 0,03 \times 0,20 + 0,025 \times 0,24 + 0,02 \times 0,21 \\ &= 0,0197 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Para dos sucesos A y B se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Ejemplo: (continuación del anterior) Supongamos que descubrimos una caja defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la caja haya sido fabricada en la cadena de montaje A1?

$$\begin{aligned} P(A_1|D) &= \frac{P(D|A_1)P(A_1)}{P(D)} \\ &= \frac{0,01 \times 0,35}{0,0197} = 0,17766 \end{aligned}$$

Variables aleatorias

- Variable aleatoria

- Variables discretas:
    - Función de probabilidad o de masa
    - Función de distribución

- Variables continuas:
    - Función de distribución
    - Función de densidad

- Esperanza, varianza, desviación típica

Variables aleatorias

- Una **variable aleatoria** es una función que asocia un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio

Ejemplo: Lanzar un dado una vez. Sea la v.a. $X =$ resultado de la tirada ¿cuántos sucesos elementales hay? ¿qué valores puede tomar X?

Ejemplo: Lanzar un dado dos veces. Sea la v.a. $X =$ resultado de la suma de las dos tiradas ¿cuántos sucesos elementales hay? ¿qué valores puede tomar Y?

- Se denotan las v.a. con letras mayúsculas, y sus posibles valores con letras minúsculas

Variables aleatorias

- Una variable aleatoria es **discreta** si toma un número finito o numerable de valores

- Una variable aleatoria es **continua** si toma un número infinito no numerable de valores (por ejemplo, en un intervalo)

Ejemplos:

- $X =$ *resultado al tirar un dado* es una variable discreta

- $Y =$ *altura de un alumno elegido al azar* es una variable continua

Variables aleatorias discretas

- Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Sea llama **función de probabilidad** o **función de masa**, al conunto de probabilidades $p_i = P[X = x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots$

Ejemplo: $X =$ resultado de lanzar un dado. La función de probabilidad es

x	1	2	3	4	5	6
$P[X = x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ejercicio: $Y =$ resultado de la suma al lanzar dos dados. La función de probabilidad es

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[Y = y]$											

Variables aleatorias discretas

Función de probabilidad - Propiedades:

- $0 \leq P[X = x_i] \leq 1$
- $\sum_i P[X = x_i] = 1$
- $P[X \leq x] = \sum_{i, x_i \leq x} P[X = x_i]$
- $P[X > x] = 1 - P[X \leq x]$

Variables aleatorias discretas

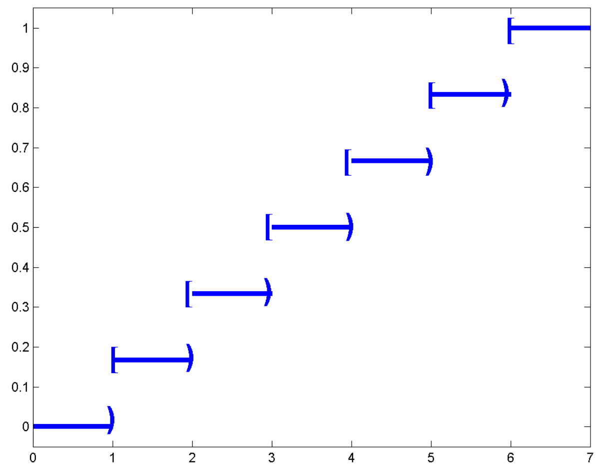
- La **función de distribución** (acumulada) de una variable aleatoria X es la función $F(x) = P[X \leq x]$

Ejemplo: $X =$ resultado de lanzar un dado. La función de probabilidad es

x	1	2	3	4	5	6
$P[X = x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

Variables aleatorias discretas

- Propiedades:
  - $F(-\infty) = 0$
  - $F(\infty) = 1$
  - Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$

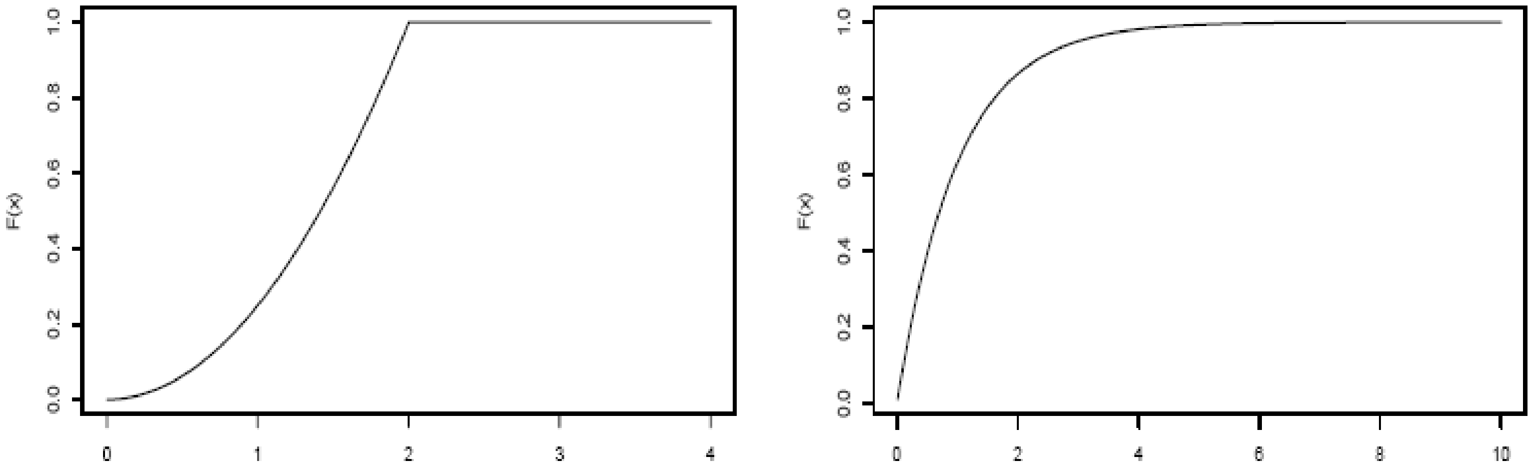


Para X discreta, la función de distribución es de tipo escalón

Cada escalón corresponde a un valor posible de X y el salto corresponde a la probabilidad.

Variables aleatorias continuas

- Para X v.a. continua, la **función de distribución** es la función $F(x) = P[X \leq x]$



Supondremos que las variables aleatorias continuas no tienen masa de probabilidad positiva en ningún punto. Entonces no son funciones de tipo escalón, sino suaves

Variables aleatorias continuas

- Propiedades:
  - $F(-\infty) = 0$
  - $F(\infty) = 1$
  - Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$
  - $F(x)$ **es continua**

- La función de probabilidad no tiene sentido en variables aleatorias continuas, pues

$$P(X = x) = 0$$

- Para sustituir la función de probabilidad, en variables aleatorias continuas usaremos la **función de densidad**

Variables aleatorias continuas

- Para una variable aleatoria continua X con función de distribución $F(x)$, la **función de densidad** de X es:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

- Propiedades:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  - $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
  - $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Ejemplo: Una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$P(X \leq 0,5) = \int_{-\infty}^{0,5} f(u)du = \int_{0}^{0,5} 12u^2(1-u)du = 0,3125$$

$$P(0,2 \leq X \leq 0,5) = \int_{0,2}^{0,5} f(u)du = \int_{0,2}^{0,5} 12u^2(1-u)du = 0,2853$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

- X v.a. discreta que toma valores $x_1, x_2, \ldots$:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) \\ V[X] &= E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 \cdot P(X = x_i) \\ &= \sum_i x_i^2 \cdot P(X = x_i) - E[X]^2 \end{aligned}$$

- X v.a. continua que toma valores en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx \\ V[X] &= E[(X - E[X])^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2 \cdot f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x) dx - E[X]^2 \end{aligned}$$

Tema 3. Probabilidad y variables aleatorias

- **Probabilidad** ✓
- **Variables aleatorias** ✓
- **Modelos de variables aleatorias**
  - Distribución Bernoulli
  - Distribución Binomial
  - Distribución de Poisson
  - Distribución normal
  - Distribuciones asociadas a la Normal

Algunos modelos probabilísticos

- **Modelos discretos**:
  - Ensayos de Bernoulli
  - Distribución Binomial
  - Distribución de Poisson

- **Modelos continuos**:
  - Distribución normal
  - Distribuciones asociadas a la normal

Modelo Bernoulli

- Partimos de un experimento aleatorio con sólo dos posibles resultados, que calificamos de éxito/fracaso.

  Definimos la variable aleatoria:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si éxito} \\ 0 & \text{si fracaso} \end{cases}$$

  Sea p la probabilidad de éxito

- El experimento se llama **ensayo de Bernoulli** y la variable aleatoria se dice que sigue una **distribución Bernoulli** de parámetro p

- Se escribe $X \sim Bernoulli(p)$

Modelo Bernoulli

Ejemplo: Tirar una moneda al aire

$$X = \begin{cases} 1 & \text{sale cara} \\ 0 & \text{si sale cruz} \end{cases}$$

Es un ensayo Bernoulli, y X sigue una distribución Bernoulli de parámetro $1/2$.

Ejemplo: Una línea aérea estima que los pasajeros que compran un billete para un vuelo tienen una probabilidad igual a $0,05$ de no presentarse al embarque de dicho vuelo

Definamos

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el pasajero se presenta} \\ 0 & \text{si no lo hace} \end{cases}$$

Entonces Y sigue una distribución Bernoulli con parámetro $0,95$.

Modelo Bernoulli

- Función de Probabilidad:

$$P[X = 0] = 1 - p \quad P[X = 1] = p$$

Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Propiedades:
  - $E[X] = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
  - $E[X^2] = p \times 1^2 + (1 - p) \times 0^2 = p$
  - $V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
  - $s[X] = \sqrt{p(1 - p)}$

Modelo Binomial

- Un ensayo Bernoulli de parámetro p se repite n veces de manera independiente. La variable *número de éxitos obtenidos*, sigue una **distribución Binomial** (de parámetros n y p)

- Una variable X sigue una distribución binomial con parámetros n y p si

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

para $x = 0, 1, \ldots, n$ donde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Se escribe $X \sim B(n, p)$

Modelo Binomial

Ejemplo La línea aérea del ejemplo anterior ha vendido **80 billetes** para un vuelo. La probabilidad de que un pasajero no se presente al embarque es de $0,05$. Definimos $X =$ *número de pasajeros que se presentan*. Entonces (suponiendo independencia)

$$X \sim B(80, 0, 95)$$

- La probabilidad de que los 80 pasajeros se presenten

$$P[X = 80] = \binom{80}{80} 0,95^{80} \times (1 - 0,95)^{80-80} = 0,0165$$

- La probabilidad de que al menos un pasajero no se presente:

$$P[X < 80] = 1 - P[X = 80] = 1 - 0,0165 = 0,9835$$

Modelo Binomial

- Propiedades:
  - $E[X] = np$
  - $E[X^2] = np + n(n-1)p^2$
  - $V[X] = np(1-p)$
  - $s[X] = \sqrt{np(1-p)}$

Distribución de Poisson: sucesos raros

- Modela el número de sucesos *raros* que ocurren en un determinado periodo de tiempo o en una cantidad de espacio determinada

Ejemplos: llamadas de telefono en una hora, erratas en una página, accidentes de tráfico, . . .

- Una variable X sigue una distribución Poisson de parámetro λ si

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Se escribe $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Distribución de Poisson: sucesos raros

- Propiedades:
  - $E[X] = \lambda$
  - $E[X^2] = \lambda + \lambda^2$
  - $V[X] = \lambda$
  - $s[X] = \sqrt{\lambda}$

- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y representa el número de sucesos raros en una unidad de tiempo, la variable Y que representa el número de dichos sucesos raros en t unidades de tiempo:

$$Y \sim \mathcal{P}(t\lambda)$$

Distribución de Poisson: sucesos raros

Ejemplo: El número medio de erratas por transparencias es de 0,2

$$X \sim \mathcal{P}(0,2)$$

¿Cuál es la probabilidad de que en una transparencia no haya erratas?

$$P[X=0] = \frac{0,2^0 e^{-0,2}}{0!} = e^{-0,2} = 0,8187$$

¿Cuál es la probabilidad de que en **4 transparencias** haya exactamente una errata?

$$\begin{aligned} X &\sim \mathcal{P}(0,8) \\ P[X=1] &= \frac{0,8^1 e^{-0,8}}{1!} = 0,8e^{-0,8} = 0,3595 \end{aligned}$$

Distribución Normal

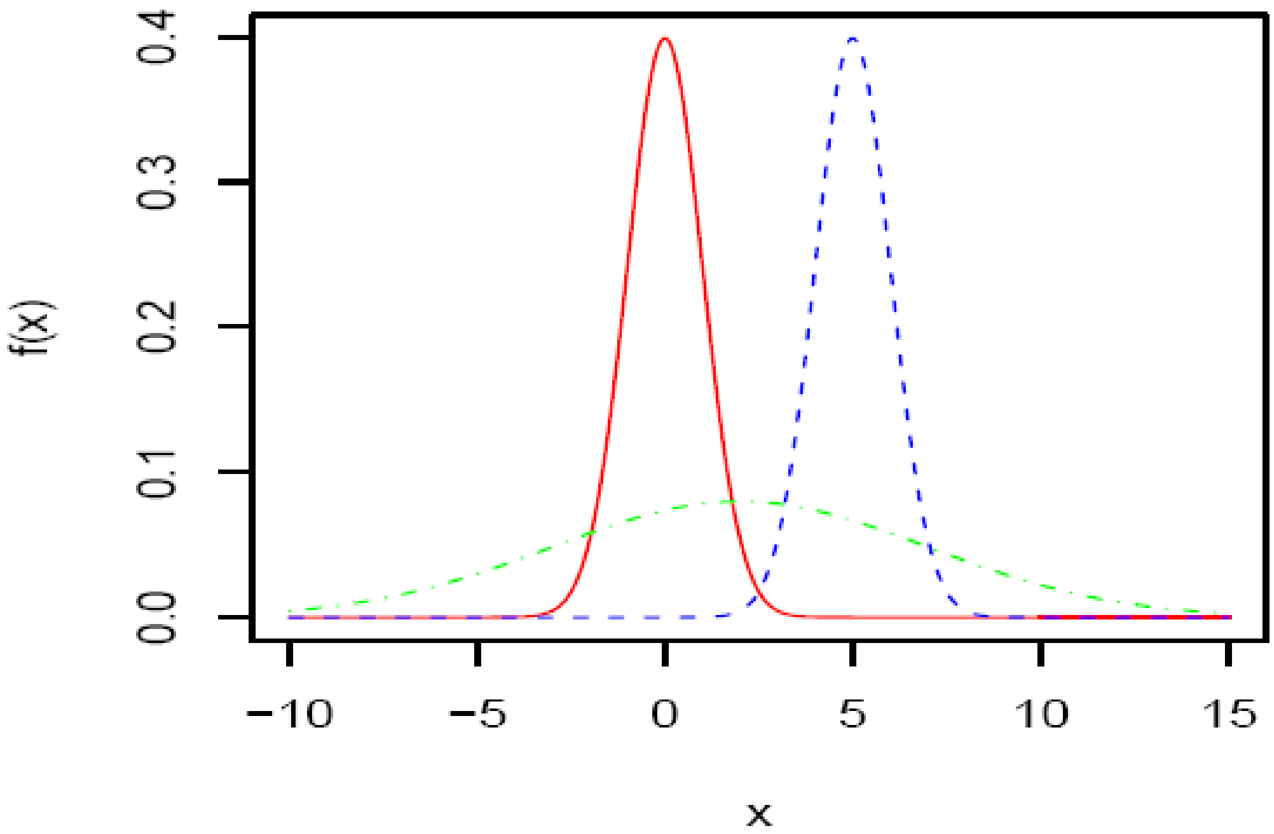
- Es la distribución más conocida y utilizada
- Se dice que una variable X sigue una **distribución normal** o **gausiana** con parámetros μ y σ, si

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

- Se escribe $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
- Su media es μ y su desviación típica es σ.

Distribución Normal

Función de densidad para 3 valores distintos de μ y σ



Distribución Normal

Propiedad: Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,683$

- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,955$

- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Cota de Chebyshev: Sea X una variable aleatoria cualesquiera con media μ y desviación típica σ:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Distribución Normal

- Transformación lineal: Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces

$$Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a\sigma)$$

- Estandarización: Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, considero

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Z recibe el nombre de **distribución normal estándar**

Teorema central del límite

El siguiente teorema nos habla de la distribución de la media de un conjunto de muchas v.a. independientes e igualmente distribuidas:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Teorema: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuidas con media μ y desviación típica σ (ambas finitas). Si n es suficientemente grande, se tiene que

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

La idea es que el promedio de muchas variables independientes e iguales, tiene una distribución Normal

Aproximaciones mediante la distribución normal

Caso Binomial: Si $X \sim B(n,p)$ con n suficientemente grande

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Caso Poisson: Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ con λ suficientemente grande

$$\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Distribuciones asociadas a la Normal

χ^2 (*Chi cuadrado*): Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuidas según $\mathcal{N}(0,1)$. La distribución de

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

se llama **distribución χ^2 con n grados de libertad**

- $E[S] = n$
- $V[S] = 2n$

Distribuciones asociadas a la Normal

t de Student: Sean $Y, X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuidas según $\mathcal{N}(0,1)$. La distribución de

$$T = \frac{Y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2/n}}$$

se llama **distribución t de Student con n grados de libertad**

- $E[T] = 0$
- $V[T] = \frac{n}{n-2}$

F de Fisher: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_m$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuidas según $\mathcal{N}(0, 1)$. La distribución de

$$F = \frac{m}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{m} Y_i^2}$$

se llama **distribución $F_{n,m}$ de Fisher con n y m grados de libertad**

- $E[F] = \dfrac{m}{m-2}$ (para $m > 2$)
- $V[F] = \dfrac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ (para $m > 4$)
- $\dfrac{1}{F} \sim F_{m,n}$
- $F_{n,m,\alpha} = \frac{1}{F_{m,n,1-\alpha}}$