LEC/LADE/LECD/LADED

HOJA DE PROBLEMAS 2
ESTIMACIÓN PUNTUAL Y MÁXIMA VEROSIMILITUD

1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria simple de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}$$

para $x > 0, \theta > 0$.

(a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(b) Hallar la varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud de θ.

2. La nota final en la asignatura de Estadística 1 es una variable aleatoria cuya distribución es Normal con desviación típica poblacional igual a 3. Para estimar la media poblacional se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 5 y se proponen los siguientes estimadores:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_1 &= \frac{X_1 - 2X_2 + 5X_4}{3} \\ \widehat{\mu}_2 &= X_2 - 2X_3 + 2X_5 \end{aligned}$$

(a) ¿Cuál de los dos estimadores propuestos tiene menor error cuadrático medio?

(b) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de la media poblacional.

(c) Calcular el error cuadrático medio del estimador obtenido en (b).

Nota: la función de densidad de una variable aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$ es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

para $-\infty < x < \infty$.

3. El valor de cotización de ciertas acciones es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \theta\left(\frac{1}{x}\right)^{\theta-1}$$

para $x > 1$ y $\theta > 1$.

(a) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de θ y su varianza asintótica.

(b) Se toma una muestra de tamaño 100 de los valores de cotización de estas acciones y se obtiene que, la media de los logaritmos de las cotizaciones es 0,4. Calcular un intervalo de confianza para θ, con $\alpha = 0,05$.

4. Asumiendo que X_1, X_2 y X_3 son variables aleatorias independientes con:

$$\left.\begin{array}{l} E(X_1) = 2 \\ V(X_1) = 4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} E(X_2) = 1 \\ V(X_2) = 6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} E(X_3) = 4 \\ V(X_3) = 8 \end{array}\right\}$$

a) Hallar:

$E\left[3X_1 + 4X_2 - 6X_3\right]$

b) Hallar:

$V\left[3X_1 + 4X_2 - 6X_3\right]$

c) Siendo:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{\theta}_1 = 3X_1 - X_3 \\ \widehat{\theta}_2 = 2X_3 - 3X_1 \end{array}\right\}$$

Calcular la Eficiencia Relativa de $\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$, ¿Cuál de los estimadores es más eficientes?

5. Se sabe que la función de densidad de una población es:

$$f(x) = \frac{\theta k^{\theta}}{x^{1+\theta}} \qquad x > k, \theta > 0$$

donde k es un valor fijo. Habiendo extraído una muestra de tamaño n, se pide:

a) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de θ.

b) Hallar la varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud de θ.

c) Suponiendo que $k = exp(1) = 2.7183$, calcular el valor del estimador de máxima verosimilitud de θ para una muestra que toma los valores de los números enteros hasta 10 inclusive.

6. El tiempo de germinación de cierta planta se distribuye según una v.a. cuya función de densidad es

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda e^{-\lambda(x-20)}, x \geq 20 \\ 0, resto \end{array} \right.$$

a) Se toma una m.a.s. de tamaño n. Calcular el estimador de M.V. para λ.

b) Si se toma una m.a.s. de 100 plantas y se obtiene $\sum x_i = 2200$

i) ¿ Cuál es la estimación máximo verosímil de λ ?

ii) ¿ Cuál es la estimación de la Varianza Asintótica del estimador de máxima verosimilitud de λ ?.

7. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de piezas independientes y no idénticamente distribuidas tomadas de un proceso de fabricación, donde la variable X_i sigue una ley exponencial, $Exp(1/i\theta)$, siendo i el orden de elección de la muestra; esto es, para $X_1, i = 1, X_2, i = 2, \ldots$

Se pide:

a) Encontrar el estimador máximo verosímil para θ

b) Encontrar el estimador máximo verosímil para $\delta = \sqrt{\theta}$

Indicación: La función de densidad de una variable aleatoria exponencial(λ) es
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$

8. Sea $\mathbf{X}$ el número de periódicos que un alumno lee diariamente. La función de masa de probabilidad de $\mathbf{X}$ es:

$\mathbf{X}$	0	1	2
$\mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x})$	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{2}$	$1 - \theta$

a) Calcular $\widehat{\theta}_n$, estimador de máxima verosimilitud de θ.

b) Aplicación al caso $n = 8$ con datos $(0, 2, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$.

9. El consumo de un cierto producto en una familia de cuatro miembros durante los meses de verano, es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(\alpha, \alpha + 1)$. Sea $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de consumos de distintas familias.

a) Demostrar que la media muestral es un estimador sesgado de α y que sus sesgo es $\frac{1}{2}$.

b) Calcular el error cuadrático medio de $\bar{x}$.

c) Obtener un estimador insesgado de α (a partir de $\bar{x}$).

10. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la función de densidad $Exponencial\ Truncada(\mu, \theta)$; donde $\mu > 0$ y $\theta > 0$. La función de densidad anterior tiene función de densidad

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \mu \\ \frac{1}{\theta}\exp(-\frac{(x-\mu)}{\theta}) & x > \mu \end{cases}$$

a) Suponiendo conocido el valor del parámetro μ , deducir la expresión del estimador de máxima verosimilitud de θ.

b) Si $\mu = 10$ y la media muestral de un determinado conjunto de datos es 15.5, ¿cuál es el valor de la estimación por máxima verosimilitud de θ?

11. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria simple de una distribución Normal con media μ y desviación típica σ. Definimos la varianza muestral $\hat{\sigma}^2$ y la varianza muestral corregida (o cuasivarianza) s^2 como:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

donde $\bar{x}$ es la media muestral. Si sabemos que una distribución χ^2_n tiene su media igual a los grados de libertad ($E(\chi^2_n) = n$) y su varianza igual al doble que la media ($Var(\chi^2_n) = 2n$),

(a) Demostrar que $\hat{\sigma}^2$ es un estimador sesgado de la varianza poblacional σ^2. Obtener su sesgo.

(b) Demostrar que s^2 es un estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2.

(c) Obtener el error cuadrático medio de $\hat{\sigma}^2$.

(d) Obtener el error cuadrático medio de s^2.

(e) Basándonos en el error cuadrático medio, ¿qué estimador es preferible?