Tema 5: Contraste de hipótesis

(a partir del material de A. Jach (http://www.est.uc3m.es/ajach/)
y A. Alonso (http://www.est.uc3m.es/amalonso/))

- Conceptos fundamentales: hipótesis nula y alternativa, error de tipo I y tipo II, función de potencia de un contraste, nivel de significación.
- Contraste de hipótesis e IC.
- Contraste de hipótesis en una población:
  - Población normal
  - Población no normal pero con muestras de tamaño grande
- Contraste de hipótesis en dos poblaciones independientes:
  - Poblaciones normales
  - Poblaciones no normales pero con muestras de tamaño grande
- Determinación del tamaño muestral

Hipótesis estadísticas

Definición 1.

Una hipótesis estadística (H) es una proposición acerca de una característica de la población de estudio. Por ejemplo: "la variable X toma valores en el intervalo (a, b)", "el valor de θ es 2", "la distribución de X es normal", etc.

Ejemplo 1.

- *Una compañía recibe un gran cargamento de piezas. Sólo acepta el envío si no hay más de un 5% de piezas defectuosas. ¿Cómo tomar una decisión sin verificar todas las piezas?*
- *Se quiere saber si una propuesta de reforma legislativa es acogida de igual forma por hombres y mujeres ¿Cómo se puede verificar esa conjetura?*

Estos ejemplos tienen algo en común:

- *Se formula la hipótesis sobre la población.*
- *Las conclusiones sobre la validez de la hipótesis se basarán en la información de una muestra.*

Tipos de hipótesis estadísticas

- Hipótesis paramétricas: Una hipótesis paramétrica es una proposición sobre los valores que toma un parámetro.

  - Hipótesis simple: aquella que especifica un único valor para el parámetro.

    Ejemplos: '$H : \theta = 0$", "$H : \theta = -23$", etc.

  - Hipótesis compuesta: aquella que especifica un intervalo de valores para el parámetro.

    Ejemplos: '$H : \theta \geq 0$", "$H : 1 \leq \theta \leq 4$", etc.

    - Hipótesis unilateral: "$H : \theta \leq 4$", '$H : 0 < \theta$", etc.
    - Hipótesis bilateral: "$H : \theta \neq 4 \Leftrightarrow H : \theta < 4$ y $\theta > 4$"

- Hipótesis no paramétricas: Una hipótesis no paramétrica es una proposición sobre cualquier otra característica de la población.

  Ejemplos: "$H : X \sim N$", "$H : X$ ind. Y", etc. (Tema 6)

Hipótesis nula y alternativa

Definición 2.

Llamamos hipótesis nula, y la representamos por H_0, a la hipótesis que se desea contrastar. Es la hipótesis que se plantea en primer lugar y la hipótesis que mantendremos a no ser que los datos indiquen su falsedad.

Llamamos hipótesis alternativa, y la representamos por H_1, a la negación de la hipótesis nula.

Ejemplo 2.

En cursos pasados, el número medio de préstamos por año y por alumno en la biblioteca de la Carlos III ha sido de 6. Este año la biblioteca ha hecho una campaña de información y quiere saber el efecto que ésta ha tenido entre los estudiantes.
¿Cuáles serían las hipótesis nula y alternativa en este caso?

Hipótesis nula y alternativa

Definición 2.

Llamamos hipótesis nula, y la representamos por H_0, a la hipótesis que se desea contrastar. Es la hipótesis que se plantea en primer lugar y la hipótesis que mantendremos a no ser que los datos indiquen su falsedad.

Llamamos hipótesis alternativa, y la representamos por H_1, a la negación de la hipótesis nula.

Ejemplo 2.

En cursos pasados, el número medio de préstamos por año y por alumno en la biblioteca de la Carlos III ha sido de 6. Este año la biblioteca ha hecho una campaña de información y quiere saber el efecto que ésta ha tenido entre los estudiantes.
¿Cuáles serían las hipótesis nula y alternativa en este caso?

$$H_0 : \mu = 6 \qquad H_1 : \mu > 6$$

Contraste de hipótesis

Definición 3.

Un contraste de hipótesis es una regla que determina, a un cierto nivel de significación, α, para qué valores de la muestra se rechaza o no se rechaza la hipótesis nula.
Es decir, un contraste de hipótesis es una partición del espacio muestral en dos regiones, una región crítica o de rechazo, RC, y una región de aceptación, RA.

$$\Omega = RC \cup RA \qquad RC \cap RA = \emptyset$$

Ejemplo 2 (cont.)

Hemos tomado una m.a.s. de 100 alumnos y obtenemos $\overline{x} = 6.23$, $s = 2.77$.
¿Cuál será la región crítica para el contraste $\quad H_0 : \mu = 6 \qquad H_1 : \mu > 6$?

Sea $X =$ "número de libros prestados por alumno y por año".
$E[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$ ambas desconocidas.

Si H_0 fuera cierta, como n es grande, sabemos que $\dfrac{\overline{X} - 6}{S/\sqrt{n}} \overset{A}{\sim} N(0,1)$.

Contraste de hipótesis

Ejemplo 2 (cont.)

Escribiremos $$\frac{\overline{X}-6}{S/\sqrt{n}} \underset{H_0}{\overset{A}{\sim}} N(0,1).$$

Es decir, si H_0 fuera cierta, $1-\alpha = P\left(\frac{\overline{X}-6}{S/\sqrt{n}} < z_\alpha\right)$.

Por tanto, al nivel de significación α,

$$RC_\alpha = \{x_1,\ldots,x_n | \frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha\} \quad RA_\alpha = \Omega \backslash RC_\alpha = \{x_1,\ldots,x_n | \frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n}} \leq z_\alpha\}$$

Para los datos del ejemplo, $n = 100$, $\overline{x} = 6.23$, $s = 2.77$, el valor del estadístico del contraste en nuestra muestra particular es:

$$\frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n}} = \frac{6.23-6}{2.77/10} = 0.8303$$

Si consideremos un nivel de significación igual a 0.05, tenemos que $\frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n}} = 0.8303 < 1.645 = z_{0.05}$, es decir, nuestra muestra particular no pertenece a la $RC_{0.05}$, y por tanto, al nivel de significación 0.05, no rechazamos la hipótesis nula.

Tipos de errores en un contraste de hipótesis

Decisión	**Estado real** H_0 cierta	H_0 falsa
Rechazar H_0	Error de Tipo I $P(Rech.\|H_0 cierta) = \alpha$ nivel de significación	Decisión correcta $P(Rech.\|H_0 falsa) = 1 - \beta$ potencia
No rechazar H_0	Decisión correcta $P(No\ Rech.\|H_0 cierta) = 1 - \alpha$	Error de Tipo II $P(No\ Rech.\|H_0 falsa) = \beta$

1. Podemos hacer la probabilidad del error de tipo I tan pequeña como queramos, PERO esto hace que aumente la probabilidad del error de tipo II.
2. Un contraste de hipótesis puede rechazar la hipótesis nula pero NO puede probar la hipótesis nula.
3. Si no rechazamos la hipótesis nula, es porque las observaciones no han aportado evidencia para descartarla, no porque sea necesariamente cierta.
4. Por el contrario, si rechazamos la hipótesis nula es porque se está razonablemente seguro ($P(Rech.|H_0 cierta) \leq \alpha$) de que H_0 es falsa y estamos aceptando implícitamente la hipótesis alternativa.

Nivel crítico o p-valor

Definición 4.

El nivel crítico, p, o p-valor es el nivel de significación más pequeño para el que la muestra particular obtenida obligaría a rechazar la hipótesis nula. Es decir:

$$p = P(Rech.H_0 \text{ para } x_1, \ldots, x_n | H_0 \text{cierta})$$

Es decir, si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es el estadístico del contraste:

$$RC_\alpha = \{x_1, \ldots, x_n |\ T(x_1, \ldots, x_n) > T_\alpha\}$$

$$\Longrightarrow p = P\left(T(X_1, \ldots, X_n) > T(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

$$RC_\alpha = \{x_1, \ldots, x_n |\ T(x_1, \ldots, x_n) < T_{1-\alpha}\}$$

$$\Longrightarrow p = P\left(T(X_1, \ldots, X_n) < T(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

$$RC_\alpha = \{x_1, \ldots, x_n |\ |T(x_1, \ldots, x_n)| > T_\alpha\}$$

$$\Longrightarrow p = P\left(|T(X_1, \ldots, X_n)| > |T(x_1, \ldots, x_n)|\right)$$

Nivel crítico o p-valor

Ejemplo 2 (cont.) Para los datos del ejemplo, $n = 100$, $\overline{x} = 6.23$, $s = 2.77$, al nivel de significación 0.05, no rechazamos la hipótesis nula. ¿Cuál es el p-valor para esta muestra? $(RC_\alpha = \{x_1, \ldots, x_n | \frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha\})$

El nivel crítico o p-valor es el nivel de significación más pequeño para el que la muestra particular obtenida obligaría a rechazar la hipótesis nula:

$$\begin{aligned} x_1, \ldots, x_n \in RC \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n}} = z_p \\ & \Leftrightarrow \quad z_p = \frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n}} = \frac{6.23-6}{2.77/10} = 0.8303 \\ & \Leftrightarrow \quad p = 0.2033 \end{aligned}$$

O equivalentemente,

$$\begin{aligned} p \quad & = \quad P(Rech.|H_0 cierta) = P\left(\frac{\overline{X}-6}{S/\sqrt{n}} > \frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n}} \,|H_0 cierta\right) \\ & \overset{Z=\frac{\overline{X}-6}{S/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)}{=} \quad P(Z > \tfrac{6.23-6}{2.77/10}) = P(Z > 0.8303) = 0.2033 \end{aligned}$$

Metodología

Método de construcción de un contraste de hipótesis paramétrico al nivel de significación α:

1. Plantear las hipótesis nula y alternativa ("$H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta \neq \theta_0$", "$H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta < \theta_0$","$H_0 : \theta \leq \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0$", etc.)
2. Determinar el estadístico del test, $T(X_1, \ldots, X_n)$, y su distribución bajo H_0 (Formulario).
3. Dos posibilidades:
   - 3.a Construir la región crítica y comprobar si la muestra obtenida está en ella (rechazamos H_0) o no (no rechazamos H_0).
   - 3.b Calcular el p-valor para la muestra obtenida. Si $p < \alpha$, se rechaza H_0.
4. Plantear las conclusiones.

Contraste de hipótesis e IC's

El contraste de una hipótesis nula simple frente a una alternativa bilateral

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

al nivel de significación α, es equivalente a construir un IC al $(1-\alpha)100\%$ para θ, y a partir de él tomar la siguiente decisión:

- rechazar H_0 si θ_0 está fuera del IC.
- no rechazar H_0 si θ_0 está en el IC.

Es decir $IC_{(1-\alpha)100\%}(\theta) = RA_\alpha$.

Ejemplo 3.

Supongamos que la altura (en cm) de los estudiantes de la UC3M es una v.a. X con distribución $N(\mu, 5)$. Con el objetivo de estimar μ se toma una m.a.s. de 100 estudiantes y se obtiene $\overline{x} = 156.8$. *(Ejemplo 1 Tema 4)*

Se quiere contrastar la siguiente hipótesis sobre esta población: "la altura media de los estudiantes de la UC3M es de 160cm" al nivel de significación 0.05.

Contraste de hipótesis e IC's

Ejemplo 3 (cont.)

Seguimos los pasos de la metodología para la construcción de contrastes:

1. Plantear las hipótesis nula y alternativa:

$$H_0 : \mu = 160 \qquad H_1 : \mu \neq 160$$

2. Determinar el estadístico del test y su distribución bajo H_0 (Formulario).

   $X \sim N(\mu, 5)$, por tanto

$$\frac{\overline{X} - \mu}{5/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\overline{X} - 160}{5/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Contraste de hipótesis e IC's

Ejemplo 3 (cont.)

3.a Construir la región crítica y comprobar si la muestra obtenida está en ella (rechazamos H_0) o no (no rechazamos H_0). Sabemos que bajo H_0

$$1-\alpha = P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-160}{5/\sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} RC_\alpha &= \left\{x_1,\ldots,x_n \mid \left|\frac{\overline{x}-160}{5/\sqrt{n}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \\ RA_\alpha &= \Omega \backslash RC_\alpha = \left\{x_1,\ldots,x_n \mid \left|\frac{\overline{x}-160}{5/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \end{aligned}$$

Recordemos que el IC al $(1-\alpha)100\%$ para μ era $\left(\overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{5}{\sqrt{n}}\right)$:

$$160 \in IC \Leftrightarrow \overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5}{\sqrt{n}} \leq 160 \leq \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow |\overline{x}-160| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow x_1,\ldots,x_n \in RA_\alpha$$

Contraste de hipótesis e IC's

Ejemplo 3 (cont.)

Para $\alpha = 0.05$ ($n = 100$, $\overline{x} = 156.8$):

$$\left| \frac{\overline{x} - 160}{5/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{156.8 - 160}{5/10} \right| = |-3.2| = 3.2 \quad y \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

es decir $x_1, \ldots, x_n \in RC_{0.05} \Rightarrow$ rechazamos H_0 al nivel de significación 0.05.

O equivalentemente, a partir del IC al 95% para μ:

$$\left(\overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{5}{\sqrt{n}} \right) = \left(156.8 \pm 1.96 \frac{5}{10} \right) = (155.82, 157.78)$$

$160 \notin IC_{95\%}(\mu) \Rightarrow$ rechazamos H_0 al nivel de significación 0.05.

Hemos comprobado que es equivalente realizar el contraste al 0.05% a encontrar el IC para μ al 95% y rechazar H_0 si μ_0 no está en él.

Contraste de hipótesis e IC's

Ejemplo 3 (cont.)

3.b (Otra alternativa) Calcular el p-valor para la muestra obtenida.

$$
\begin{aligned}
p &= P(Rech.H_0 \ para \ x_1, \ldots, x_n | H_0 cierta) \\
&= P\left(\left| \frac{\overline{X}-160}{5/\sqrt{n}} \right| > \left| \frac{\overline{x}-160}{5/\sqrt{n}} \right| \ |H_0 cierta \right) \\
&\overset{Z=\frac{\overline{X}-160}{5/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)}{=} P\left(|Z| > \left| \frac{156.8-160}{5/10} \right| \right) = P(|Z| > 6.4) = 2 \cdot P(Z > 6.4) \approx 0
\end{aligned}
$$

El p-valor obtenido es menor que α ($p \approx 0 << \alpha$) $\Rightarrow$ rechazamos H_0 al nivel de significación 0.05.

4. Plantear las conclusiones.

Al nivel de significación $\alpha = 0.05$, la muestra aporta suficiente evidencia para rechazar la hipótesis que establecía que la media poblacional era 160.

Contraste de hipótesis en una población

Sea X una v.a. cuya distribución depende de θ. $X_1, \ldots, X_n$ m.a.s. de X.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } T(X_1, \ldots, X_n) \text{ el estadístico del contraste} \\ T(X_1, \ldots, X_n) \overset{H_0}{\sim} P_0 \end{array}\right\} \quad \text{Formulario}^*$$

y T_α el cuantil α de P_0.

H_0	H_1	RC_α
$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$\{x_1 \ldots, x_n \mid \|T(X_1, \ldots, X_n)\| > T_{\alpha/2}\}$
$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$\{x_1 \ldots, x_n \mid T(X_1, \ldots, X_n) > T_\alpha\}$
$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$\{x_1 \ldots, x_n \mid T(X_1, \ldots, X_n) < T_{1-\alpha} \;{}^{**}\}$

* Como siempre, dos casos posibles: X normal o X no normal pero n grande (TCL). Hay que formular siempre TODAS las hipótesis necesarias.

** Si P_0 es simétrica (normal o t-student), entonces $T_{1-\alpha} = -T_\alpha$.

Contraste de hipótesis en dos poblaciones independientes

Sea X una v.a. cuya distribución depende de θ_1. $X_1, \ldots, X_{n_1}$ m.a.s. de X.
Sea Y una v.a. cuya distribución depende de θ_2. $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ m.a.s. de Y.
X e Y **independientes**.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } T(X_{1:n_1}, Y_{1:n_2}) \text{ el estadístico del contraste} \\ T(X_{1:n_1}, Y_{1:n_2}) \overset{H_0}{\sim} P_0 \end{array}\right\} \quad \text{Formulario}^*$$

y T_α el cuantil α de la distribución de P_0.

H_0	H_1	RC_α
$\theta_1 - \theta_2 = d_0^{**}$	$\theta_1 - \theta_2 \neq d_0$	$\{x_{1:n_1}, y_{1:n_2} \mid \lvert T(X_1, \ldots, X_n)\rvert > T_{\alpha/2}\}$
$\theta_1 - \theta_2 \leq d_0$	$\theta_1 - \theta_2 > d_0$	$\{x_{1:n_1}, y_{1:n_2} \mid T(X_1, \ldots, X_n) > T_\alpha\}$
$\theta_1 - \theta_2 \geq d_0$	$\theta_1 - \theta_2 < d_0$	$\{x_{1:n_1}, y_{1:n_2} \mid T(X_1, \ldots, X_n) < T_{1-\alpha}\}$

* Como siempre, dos casos posibles: X, Y normales o X, Y no normales pero n grande (TCL). Hay que formular siempre TODAS las hipótesis necesarias.

** En general, en la comparación de varianzas $d_0 = 0$.

Determinación del tamaño muestral

Definición 5.

La potencia o función potencia del contraste paramétrico

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$$

se define como

$$\begin{aligned} p(\theta_1) &= 1 - \beta(\theta_1) = 1 - P(\text{Error de Tipo II}) = P(\text{Rech. } H_0 |\, H_0 \text{ falsa}) \\ &= P(\text{Rech. } H_0 |\, \theta = \theta_1), \qquad \forall \theta_1 \in \Theta_1. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 (cont.)

Para el contraste

$$H_0 : \mu = 160 \qquad H_1 : \mu \neq 160$$

teníamos

$$RC_\alpha = \left\{ x_1, \ldots, x_n \,\middle|\, \left| \frac{\overline{x} - 160}{5/\sqrt{n}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}.$$

Determinación del tamaño muestral

Ejemplo 3 (cont.)

La función de potencia de este contraste es:

$$
\begin{aligned}
p(\mu_1) &= P(Rech.\ H_0 |\, \mu = \mu_1) = P\left(\left| \frac{\overline{X} - 160}{5/\sqrt{n}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \;\middle|\; \mu = \mu_1 \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - 160}{5/\sqrt{n}} < -z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } \frac{\overline{X} - 160}{5/\sqrt{n}} > z_{\frac{\alpha}{2}} \;\middle|\; \mu = \mu_1 \right) \\
&= P\left(\overline{X} < 160 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{5}{\sqrt{n}} \text{ o } \overline{X} > 160 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{5}{\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu = \mu_1 \right) \\
[\text{tipif.}] &= P\left(\frac{\overline{X} - \mu_1}{5/\sqrt{n}} < \frac{160 - \mu_1}{5/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } \frac{\overline{X} - \mu_1}{5/\sqrt{n}} > \frac{160 - \mu_1}{5/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \;\middle|\; \mu = \mu_1 \right) \\
\left[\begin{array}{l} Z = \frac{\overline{X} - \mu_1}{5/\sqrt{n}} \\ \overset{\mu = \mu_1}{\sim} N(0,1) \end{array} \right] &= P\left(Z < \frac{160 - \mu_1}{5/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } Z > \frac{160 - \mu_1}{5/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \right), \qquad \forall \mu_1 \neq 160.
\end{aligned}
$$

Determinación del tamaño muestral

Ejemplo 3 (cont.)

¿Cómo es $p(\mu_1)$ en función de n?

¿Y en función de $|\mu_0 - \mu_1|$?

Dada σ y prefijado el nivel de significación, el objetivo es obtener una potencia mayor o igual que un cierto valor (valores usuales 0.9 ó 0.8) cuando la diferencia entre la media verdadera, μ_1, y la hipotética, μ_0, supere un valor prefijado.

Buscaremos el tamaño de muestra mínimo que verifique esa condición.