Tema 2: Estimación puntual

(basado en el material de A. Jach (http://www.est.uc3m.es/ajach/)
y A. Alonso (http://www.est.uc3m.es/amalonso/))

- Planteamiento del problema: estimador y estimación
- Propiedades de un estimador
  - Insesgadez
  - Eficiencia
  - Error cuadrático medio
- Propiedades de un estimador en muestras grandes
  - Consistencia
  - Insesgadez asintótica

Planteamiento del problema

Objetivo: estimar un parámetro desconocido de una población dada.

Definición 1.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una población. Sea θ un parámetro de interés de esa población. Un estimador puntual (estimador) de θ es cualquier función de la m.a.s. (y sólo de muestra):

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Observaciones:

- Un estimador puntual no es más que un estadístico cuya función va a ser la de estimar (aproximar) el valor de un parámetro. Un estimador es por tanto una v. a.
- Una realización particular del estimador, es decir, el valor del estimador en una muestra particular, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se llama estimación.
- $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) \neq T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Planteamiento del problema

Ejemplos de estimadores:

Parámetro		Estimador	Estimación
Media	μ	$\overline{X}$	$\overline{x}$
Varianza	σ^2	S^2 (s^2)	s^2
Desviación típica	σ	S (s)	s
Proporción	p	$\hat{p}$	$\hat{p}$

NOTACIÓN: En general denotaremos por θ el parámetro poblacional y por $\hat{\theta}$ (o $\hat{\theta}_n$) su estimador y cualquier estimación particular.

Propiedades de un estimador

Ejemplo 1.

Una cámara de refrigeración tiene una temperatura uniformemente distribuida entre 0 grados y **b** *grados sobre cero, regulada mediante un termostato. Para estimar la temperatura máxima que se puede alcanzar (***b***), se eligen diez momentos distintos durante el día obteniéndose temperaturas* $X_1, X_2, \dots, X_{10}$*. Definimos los estimadores:*

$$T_1(X_1, X_2, \dots, X_{10}) = 2 \cdot \overline{X}$$

$$T_2(X_1, X_2, \dots, X_{10}) = \max\{X_1, X_2, \dots, X_{10}\}$$

¿Cuál de los dos es preferible? *(P. Gil y S. Montes. Univ. de Oviedo.)*

¿Cuáles son las propiedades deseables para un estimador?

Ser INSESGADO, CONSISTENTE Y EFICIENTE

Propiedades de un estimador

Definición 2.

Se dice que un estimador $T(X_1, \ldots, X_n)$ *de* θ *es insesgado (o centrado) si*

$$E[T(X_1, \ldots, X_n)] = \theta$$

Es decir, si tomamos repetidas muestras, EN MEDIA, el valor del estadístico estará cerca del verdadero valor del parámetro.

Definición 3.

Se dice que un estimador $T(X_1, \ldots, X_n)$ *de* θ *es asintóticamente insesgado si*

$$\lim_{n \to \infty} E[T(X_1, \ldots, X_n)] = \theta$$

Esta propiedad es interesante si tenemos una muestra de tamaño grande.

Definición 4.

El sesgo de un estimador $T(X_1, \ldots, X_n)$ *de* θ*, se define como* $b_T(\theta) = E[T] - \theta$.

Propiedades de un estimador

Parámetro		Estimador	¿Es Insesgado?
Media	μ	$\overline{X}$	Sí
Varianza	σ^2	S^2 (s^2)	Sí
Desviación típica	σ	S (s)	No
Proporción	p	$\hat{p}$	Sí

Observación: La varianza muestral, $V^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$, no es un estimador insesgado de σ^2 $\left(E[V^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$, pero sí es un estimador asintóticamente insesgado σ^2.

Propiedades de un estimador

Ejemplo 1 (cont.) ¿Son T_1 y T_2 estimadores insesgados de **b**?

X = temperatura en la cámara $\sim U(0, b)$:

$$\begin{array}{rclcrclc} f_X(x) & = & \frac{1}{b}, & & F_X(x) & = & \frac{x}{b} & 0 \leq x \leq b \\ E[X] & = & \frac{b}{2}, & & Var[X] & = & \frac{b^2}{12} & \end{array}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ m.a.s. de $X \Leftrightarrow X_1, X_2, \ldots, X_{10} \sim F_X$ i.i.d.

Recordemos la definición de los dos estimadores:

$$T_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = 2 \cdot \overline{X}$$
$$T_2(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{10}\}$$

- ¿$T_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$ es insesgado?

$$E[T_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10})] = E[2 \cdot \overline{X}] = 2E[\overline{X}] = 2E[X] = 2\frac{b}{2} = b \quad \longrightarrow \text{SÍ}$$

Propiedades de un estimador

Ejemplo 1 (cont.)

- ¿$T_2(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ es insesgado?

Para calcular la esperanza de T_2 vamos a obtener primero su distribución:

$$
\begin{aligned}
F_{T_2}(x) &= P(T_2 \le x) = P(\max\{X_1, \dots, X_{10}\} \le x) = P(X_1 \le x, \dots, X_{10} \le x) \\
&\overset{ind.}{=} P(X_1 \le x) \cdot \ldots \cdot P(X_{10} \le x) = F_{X_1}(x) \cdot \ldots \cdot F_{X_{10}}(x) \\
&\overset{i.d.}{=} F_X(x)^{10}
\end{aligned}
$$

$$
f_{T_2}(x) = F'_{T_2}(x) = \left(F_X(x)^{10}\right)' = 10 \cdot F_X(x)^9 \cdot F'_X(x) = 10 \cdot F_X(x)^9 \cdot f_X(x)
$$

Por tanto:

$$
f_{T_2}(x) = 10 \left(\frac{x}{b}\right)^9 \frac{1}{b} = 10\,\frac{x^9}{b^{10}} \quad si\ 0 \le x \le b
$$

Ahora podemos calcular la esperanza de T_2:

$$
\begin{aligned}
E[T_2] &= \int_0^b x\, f_{T_2}(x)\, dx = \int_0^b x\, 10\, \frac{x^9}{b^{10}}\, dx = \frac{10}{b^{10}} \int_0^b x^{10} dx = \frac{10}{b^{10}} \left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^b = \frac{10}{b^{10}}\, \frac{b^{11}}{11} \\
&= \frac{10}{11}\, b \quad \longrightarrow \text{NO ES INSESGADO}
\end{aligned}
$$

Propiedades de un estimador

Ejemplo 1 (cont.)

Sea $T_3 = \frac{11}{10} T_2 = 1.1 \max\{X_1, \ldots, X_{10}\}$:

$$E[T_3] = E\left[\frac{11}{10} T_2\right] = \frac{11}{10} E[T_2] = \frac{11}{10} \frac{10}{11} b = b \quad \longrightarrow \text{ES INSESGADO}$$

Tenemos dos estimadores insesgados de b:

$$T_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = 2 \cdot \overline{X}$$

$$T_3(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = 1.1 \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{10}\}$$

¿Cuál de los dos es preferible?

Propiedades de un estimador

Definición 5.

Sean $T_1(X_1, \ldots, X_n)$ y $T_2(X_1, \ldots, X_n)$ dos estimadores insesgados de θ. Se dice que T_1 es más eficiente que T_2 si se verifica que

$$Var[T_1(X_1, \ldots, X_n)] < Var[T_2(X_1, \ldots, X_n)]$$

Es decir, un estimador más eficiente que otro tiene menor dispersión.

Definición 6.

Sean $T_1(X_1, \ldots, X_n)$ y $T_2(X_1, \ldots, X_n)$ dos estimadores insesgados de θ. Se define la eficiencia relativa de T_1 respecto a T_2 como

$$E.R.[T_1, T_2] = \frac{Var[T_2]}{Var[T_1]}$$

Algunos autores la definen al revés, es decir $E.R.[T_1, T_2] = \dfrac{Var[T_1]}{Var[T_2]}$. Da igual que definición se use, lo importante es interpretar correctamente el resultado.

Propiedades de un estimador

Ejemplo 1 (cont.)

Vamos a ver cuál de los dos estimadores insesgados de b es más eficiente:

$$T_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = 2 \cdot \overline{X}$$

$$T_3(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = 1.1 \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{10}\}$$

- Cálculo de la varianza de T_1:

$$Var[T_1] = Var[2 \cdot \overline{X}] = 2^2\, Var[\overline{X}] = 4\, \frac{Var[X]}{n} = 4 \frac{b^2/12}{10} = \frac{b^2}{30}$$

- Cálculo de la varianza de T_3:

$$E[T_2^2] \;= \int_0^b x^2\, f_{T_2}(x)\, dx = \int_0^b x^2\, 10\, \frac{x^9}{b^{10}}\, dx = \frac{10}{b^{10}} \int_0^b x^{11} dx = \frac{10}{b^{10}} \left[\frac{x^{12}}{12}\right]_0^b = \frac{10}{12}\, b^2$$

$$E[T_3^2] \;= E[(1.1\; T_2)^2] = E[1.1^2\; T_2^2] = 1.1^2 E[T_2^2] = 1.1^2 \frac{10}{12}\, b^2 = \frac{121}{100} \frac{10}{12}\, b^2 = \frac{121}{120}\, b^2$$

$$Var[T_3] = E[T_3^2] - E[T_3]^2 = \frac{121}{120}\, b^2 - b^2 = \frac{b^2}{120}$$

Propiedades de un estimador

Ejemplo 1 (cont.)

$$Var[T_3] = \frac{b^2}{120} < \frac{b^2}{30} = Var[T_1]$$

T_3 es más eficiente que T_1.

Podemos calcular la eficiencia relativa de estos dos estimadores:

$$E.R.[T_1, T_3] = \frac{Var[T_3]}{Var[T_1]} = \frac{b^2/120}{b^2/30} = \frac{1}{4}$$

T_3 es 4 veces más eficiente que T_1.

Para la estimación de la temperatura máxima (b) que se alcanza en la cámara de refrigeración preferiremos el estimador
$T_3(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = 1.1 \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{10}\}$ al estimador
$T_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = 2 \cdot \overline{X}$.

Propiedades de un estimador

Ejemplo 2.

En un centro de ingeniería se dispone de un aparato de medición de longitudes que produce mediciones centradas con una varianza σ^2. *Se quieren medir las longitudes de dos barras de metal, pero debido al coste que supone el uso del aparato, sólo se pueden hacer dos mediciones.*

Se proponen los siguientes métodos:

i) *medir cada una de las dos barras por separado.*

ii) *poner una barra a continuación de la otra y medir la distancia total, y luego poner una barra al lado de la otra y medir la diferencia de longitudes. Usar estas dos medidas para estimar las longitudes de las barras.*

¿Cuál de los dos procedimientos es preferible?

(F. Tusell y A. Garín, 1991, p. 213)

Propiedades de un estimador

¿Cómo comparamos un estimador insesgado con un estimador sesgado?

Definición 7.

Sea $T(X_1, \ldots, X_n)$ un estimador de θ. Se define el error cuadrático medio de T como

$$ECM(T) = E\left[(T - \theta)^2\right]$$

El error cuadrático medio de un estimador mide la "cercanía" de ese estimador al parámetro que queremos estimar.

Propiedades de un estimador

Proposición 1.

Sea $T(X_1,\ldots,X_n)$ *un estimador de* θ. *Se cumple que:*

$$ECM(T) = Var[T] + b_T(\theta)^2$$

El ECM involucra las dos propiedades anteriormente vistas: insesgadez y eficiencia. Cuanto más cerca esté la esperanza de un estimador del parámetro, y cuanto más pequeña sea su varianza, menor será su ECM.
En el caso de dos estimadores insesgados, comparar sus ECM es lo mismo que comparar sus varianzas (**Ejemplo 1**).

Dem.:

$$\begin{aligned}
ECM(T) &= E\left[(T-\theta)^2\right] = E\left[T^2+\theta^2-2\,T\,\theta\right] = E\left[T^2\right]+\theta^2-2\,\theta E[T] \\
&= E\left[T^2\right] - E[T]^2 + E[T]^2 + \theta^2 - 2\,\theta E[T] \\
&= \left(E\left[T^2\right] - E[T]^2\right) + \left(E[T]^2 + \theta^2 - 2\,\theta E[T]\right) \\
&= Var[T] + (E[T]-\theta)^2 = Var[T] + b_T(\theta)^2
\end{aligned}$$

Propiedades de un estimador

Ejemplo 3.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con $E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$. Calcular el error cuadrático medio para los siguientes estimadores del parámetro μ:

$$T_1 = X_1$$
$$T_2 = \frac{(3X_1 - 2X_2 + X3)}{6}$$

Examen Enero 2002

Error cuadrático medio de T_1:

$$\begin{aligned}
E[T_1] &= E[X_1] = \mu \qquad \Rightarrow b_{T_1}(\theta) = 0 \\
Var[T_1] &= Var[X_1] = \sigma^2 \\
ECM(T_1) &= Var[T_1] + b_{T_1}(\theta)^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

Propiedades de un estimador

Ejemplo 3 (cont.)

Error cuadrático medio de T_2:

$$
\begin{aligned}
E[T_2] &= E\left[\frac{(3X_1 - 2X_2 + X_3)}{6}\right] = \frac{1}{2}E[X_1] - \frac{1}{3}E[X_2] + \frac{1}{6}E[X_3] = \frac{1}{3}\mu \\
&\Rightarrow \quad b_{T_2}(\theta) = \frac{1}{3}\mu - \mu = \frac{-2}{3}\mu \\
Var[T_2] &= Var\left[\frac{(3X_1 - 2X_2 + X_3)}{6}\right] \overset{ind.}{=} \frac{1}{4}Var[X_1] + \frac{1}{9}Var[X_2] + \frac{1}{36}Var[X_3] \\
&= \frac{7}{18}\sigma^2 \\
ECM(T_2) &= Var[T_2] + b_{T_2}(\theta)^2 = \frac{7}{18}\sigma^2 + \left(\frac{-2}{3}\mu\right)^2 = \frac{7}{18}\sigma^2 + \frac{4}{9}\mu^2
\end{aligned}
$$

Propiedades de un estimador

Definición 8.

Se dice que un estimador $T(X_1, \ldots, X_n)$ de θ es consistente si T converge en probabilidad a θ cuando el tamaño de muestra tiende a infinito, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} P(|T(X_1, \ldots, X_n) - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

La consistencia de un estimador garantiza que si tenemos un tamaño de muestra grande cualquier estimación particular va a estar cerca del valor de θ.

Proposición 2.

Sea $T(X_1, \ldots, X_n)$ un estimador de θ que verifica

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E[T(X_1, \ldots, X_n)] &= \theta \qquad \textit{(Asintóticamente Insesgado)} \\ \lim_{n\to\infty} Var[T(X_1, \ldots, X_n)] &= 0 \end{aligned}$$

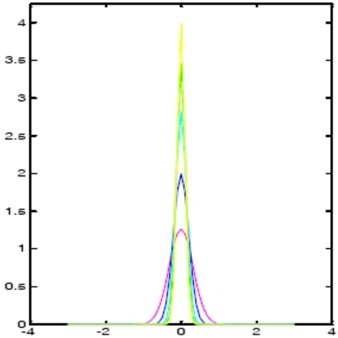
entonces T es un estimador consistente de θ.

Observación: Consistente $\not\Rightarrow$ Insesgado

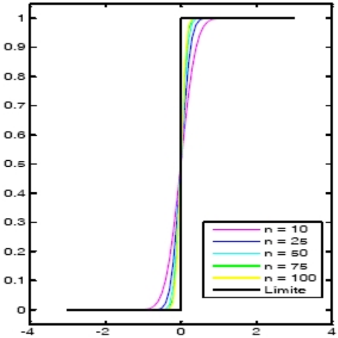
Propiedades de un estimador

Ejemplo 4.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ *una m.a.s. de* $X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{n})$*.*
Cuando n tiende a infinito la varianza de $\overline{X}$ *tiende a 0.*
Por tanto $\overline{X}$ *es un estimador consistente de* μ*.*



Funciones de densidad



Funciones de distribución