Tema 6. Estimación puntual

En este tema:

- Planteamiento del problema.
- Criterios de comparación de estimadores:
  - Insesgadez.
  - Estimadores de mínima varianza.
  - Error cuadrático medio.
  - Consistencia.
- Métodos para obtener estimadores:
  - Método de los momentos.
  - Método de máxima verosimilitud.

Planteamiento del problema

- Supondremos
  - se observa una m.a.s. de una variable aleatoria X,
  - que sigue una distribución conocida (normal, exponencial, Poisson, etc)
  - aunque con parámetros desconocidos
- El problema que estudiaremos es cómo estimar estos parámetros a partir de los datos de la muestra.
- De estos parámetros lo único que se conoce es su rango de posibles valores, denominado espacio paramétrico.

Ejemplos: Algunos parámetros de interés podrían ser la media o la varianza poblacional, o la proporción de la población que posee determinado atributo.

Definiciones

Estadístico Un estadístico T es una función real de la muestra aleatoria $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$.

Estimador Estadístico que se usa para estimar un parámetro. Ej.: $\overline{X}$.

Estimación Realización específica de un estimador. Ej.: $\overline{x}$.

Estimador Puntual Función de la muestra que da como resultado un único valor. La correspondiente realización se llama estimación puntual del parámetro.

Notación:

$$\begin{aligned} \theta &= \text{parametro que se quiere estimar} \\ \hat{\theta} &= \text{estimador de } \theta \end{aligned}$$

(acento circunflejo (^) encima)

Ejemplos de estimadores

Ejemplo: Media poblacional μ, un estimador se denota por $\hat{\mu}$. Un estimador puede ser la media muestral

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \quad \Leftarrow \text{Estimador : funcion de la muestra}$$

Para un mismo parámetro θ podemos definir tantos estimadores como queramos. Algunos serán mejores que otros? ¿Cuál utilizar?

Ejemplo:
X = el gasto de un estudiante universitario en la compra de libros de texto.
¿cuál es el gasto medio $\mu = E[X]$?
Una m.a.s. de tamaño n: $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Obtenemos los valores: $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ejemplos de estimadores

Ejemplo cont.:

a) Proponer cuatro estimadores del parámetro poblacional μ

$$T_1(X_1, \ldots, X_n) = \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$T_2(X_1, \ldots, X_n) = \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$T_3(X_1, \ldots, X_n) = \hat{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

$$T_4(X_1, \ldots, X_n) = \hat{\mu}_4 = X_2 - X_1$$ $\Leftarrow$ Puede haber estimadores absurdos

Ejemplos de estimadores

Ejemplo cont.:
b) Suponer que $n = 3$ y que la muestra es $x_1 = 30$, $x_2 = 20$ y $x_3 = 10$. Calcular las estimaciones con cada uno de los estimadores propuestos en apartado **a)**.

$$\begin{aligned} T_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{30 + 20 + 10}{3} = 20 \\ T_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{30 + 20 + 10}{2} = 30 \\ T_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{30 + 10}{2} = 20 \\ T_4(x_1, x_2, x_3) &= 20 - 30 = -10 \end{aligned}$$

¿Cuál estimación utilizo? Una respuesta es utilizar aquella estimación cuyo estimador tenga mejores propiedades.

Propiedades de los estimadores

- Un estimador $\hat{\theta}$ de θ es insesgado si verifica que

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Ejemplo: La media, la varianza y las proporciones muestrales son estimadores insesgados de los correspondientes parámetros poblacionales.

- Si $E[\hat{\theta}] \neq \theta$ se dice que el estimador es sesgado
- El sesgo de un estimador viene entonces definido por

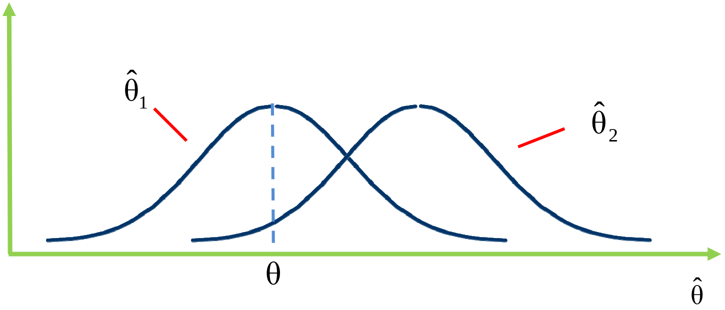
$$Sesgo(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

- En la práctica es preferible un estimador cuya distribución esté centrada alrededor del parámetro que se está estimando ($sesgo = 0$).

Propiedades de los estimadores

- $\hat{\theta}_1$ es un estimador insesgado de θ.
- $\hat{\theta}_2$ es un estimador sesgado de θ.

$\hat{\theta}_1$ **ES UN ESTIMADOR INSESGADO** $\hat{\theta}_2$ **ES SESGADO**



Propiedades de los estimadores

Ejemplo cont.:

c) ¿Cuáles de los estimadores del ejemplo anterior son insesgados?

$$
\begin{aligned}
E[T_1] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overbrace{E[X_i]}^{\mu} = \mu \qquad \Leftarrow \text{insesgado} \\
E[T_2] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{n}{n-1}\mu \\
E[T_3] &= E\left[\frac{X_1+X_n}{2}\right] = \frac{E[X_1]+E[X_n]}{2} = \frac{\mu+\mu}{2} = \mu \qquad \Leftarrow \text{insesgado} \\
E[T_4] &= E\left[X_2 - X_1\right] = E[X_2] - E[X_2] = \mu - \mu = 0
\end{aligned}
$$

T_1 y T_3 son insesgados ¿Cuál utilizo?

Propiedades de los estimadores

En lo que respecta a la varianza en general serán preferibles aquellos estimadores que tengan menor varianza, pues serán más precisos en el sentido de que variarán poco de unas muestras a otras.

- Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de θ. Diremos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ si se verifica que

$$V[\hat{\theta}_1] < V[\hat{\theta}_2]$$

- Si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ, y no hay ningún otro estimador insesgado que tenga menor varianza, entonces se dice que $\hat{\theta}$ es el estimador insesgado más eficiente o estimador de mínima varianza.

Estimadores de mínima varianza

Algunos estimadores insesgados de mínima varianza son:

- La media muestral cuando la muestra proviene de una distribución normal.
- La varianza muestral cuando la muestra proviene de una distribución normal.
- La proporción muestral cuando la muestra proviene de una distribución binomial.

Error cuadrático medio

Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ . El error cuadrático medio de $\hat{\theta}$ es

$$ECM[\hat{\theta}] = E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

Proposición: Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ. Se cumple que:

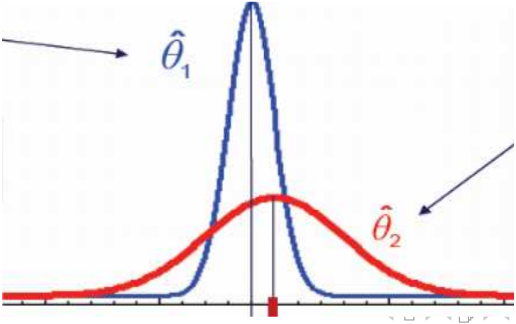
$$\begin{aligned} ECM[\hat{\theta}] &= V[\hat{\theta}] + \left(E[\hat{\theta}] - \theta\right)^2 \\ &= V[\hat{\theta}] + \left(Sesgo(\hat{\theta})\right)^2 \end{aligned}$$

Error cuadrático medio

¿Cómo seleccionar el estimador más adecuado?

- Que $E[\hat{\theta}]$ no se aleje mucho de θ
- Que $\hat{\theta}$ tenga poca varianza
- Si hay varios estimadores, con distinto sesgo y varianza $\Rightarrow$ menor ECM.

- $\hat{\theta}_1$ es sesgado
- $\hat{\theta}_2$ es insesgado pero de mayor varianza



Propiedades de los estimadores

Se dice que un estimador $T(X_1,\ldots,X_n)$ de θ es consistente si T converge en probabilidad a θ cuando el tamaño de muestra tiende a infinito, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} P(|T(X_1,\ldots,X_n)-\theta|<\varepsilon)=1 \quad \forall\varepsilon>0$$

La consistencia de un estimador garantiza que si tenemos un tamaño de muestra grande cualquier estimación particular va a estar cerca del valor de θ.

Proposición: Sea $T(X_1,\ldots,X_n)$ un estimador de θ que verifica

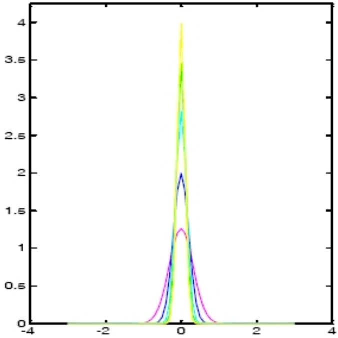
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E[T(X_1,\ldots,X_n)] &= \theta \qquad \text{(Asintóticamente Insesgado)} \\ \lim_{n\to\infty} Var[T(X_1,\ldots,X_n)] &= 0 \end{aligned}$$

entonces T es un estimador consistente de θ.

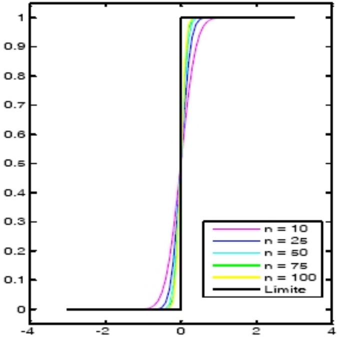
Observación: Consistente $\not\Rightarrow$ Insesgado

Propiedades de los estimadores

Ejemplo: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.
Cuando n tiende a infinito la varianza de $\overline{X}$ tiende a 0.
Por tanto $\overline{X}$ es un estimador consistente de μ.



Funciones de densidad



Funciones de distribución

Más ejemplos

Ejemplo: El consumo de un cierto producto en una familia de cuatro miembros durante los meses de verano, es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(\alpha, \alpha+1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (\alpha, \alpha+1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de consumos de distintas familias.

a) Demostrar que la media muestral es un estimador sesgado de **a** y que su sesgo es $\frac{1}{2}$.

b) Calcular el error cuadrático medio de $\bar{X}$.

c) Obtener un estimador insesgado de **a** (a partir de $\bar{X}$).

Más ejemplos

Ejemplo cont.:

a)

$$E[\bar{X}] = \int_{\alpha}^{\alpha+1} x \cdot f(x)dx = \alpha + \frac{1}{2} \neq \alpha \quad \Rightarrow \quad Sesgo(\bar{X}) = \frac{1}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} ECM(\bar{X}) &= V[\bar{X}] + (Sesgo(\bar{X}))^2 \\ &= \frac{1}{12n} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3n+1}{12n} \end{aligned}$$

c)

$$\hat{\alpha} = \bar{X} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad E[\hat{\alpha}] = \alpha$$

Metodos de construcción de estimadores

- Método de los momentos:

  Se basa en igualar los momentos muestrales con los momentos poblacionales.

- Método de máxima verosimilitud:

  Se basa en maximizar la función de verosimilitud MV (que mide lo verosímil o creíble que resulta cada valor de θ cuando se ha obtenido una muestra concreta).

Método de máxima verosimilitud

La función de verosimilitud $L(\theta)$ se define como

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) \quad \Leftarrow \text{distribuciones discretas}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \quad \Leftarrow \text{distribuciones continuas}$$

- $L(\theta)$ es función de θ, para unos ciertos valores fijos de la muestra $(x_1, \ldots, x_n)$. No es una variable aleatoria.
- Por comodidad, se usa su logaritmo $\ln L(\theta) \Leftarrow$ función soporte.

Propiedades del estimadores de MV

- El EMV siempre está dentro del espacio paramétrico.
- El estimador de máxima verosimilitud, bajo condiciones generales, se distribuye asintóticamente (cuando el tamaño muestral tiende a infinito) según una normal.
- El EMV es un estimador consistente (en el límite, para muestras grandes, tiende a tener el valor del parámetro).
- El EMV es asintóticamente insesgado (tiende a ser insesgado).
- El EMV es asintóticamente eficiente (tiende a tener mínima varianza).