Tema 3. Probabilidad y variables aleatorias

En este tema:

- Probabilidad:
  - Experimentos aleatorios, espacio muestral, sucesos.
  - Interpretaciones de la probabilidad.
  - Propiedades de la probabilidad.
  - Probabilidad condicionada y teorema de Bayes.
- Variables aleatorias:
  - Concepto de variable aleatoria.
  - Variables aleatorias discretas.
  - Variables aleatorias continuas.
  - Esperanza, varianza y desviación típica.
- Modelos de variables aleatorias

  ...

Tema 3. Probabilidad y variables aleatorias

En este tema:

- Probabilidad

  ...

- Variables aleatorias

  ...

- Modelos de variables aleatorias:
  - Distribución Bernoulli
  - Distribución Binomial
  - Distribución de Poisson
  - Distribución normal
  - Distribuciones asociadas a la normal

Conceptos básicos

- Experimento aleatorio: proceso de observar un fenómeno cuyos resultados son inciertos.
- Suceso elemental: un posible resultado de un experimento aleatorio.

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

- Espacio muestral: la colección de todos los posibles resultados de un experimento.

$$\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$$

- Suceso: un subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto de sucesos elementales

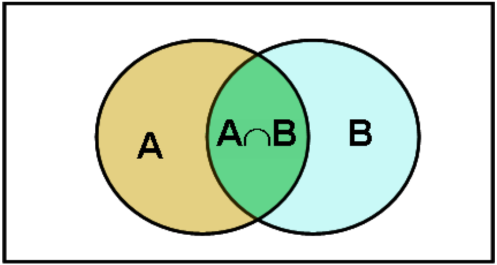
$$A = \{e_1, e_3\}$$

Ejemplos:

- Resultado al lanzar una moneda.
- Precio de la acción x al cierre de sesión el próximo lunes.

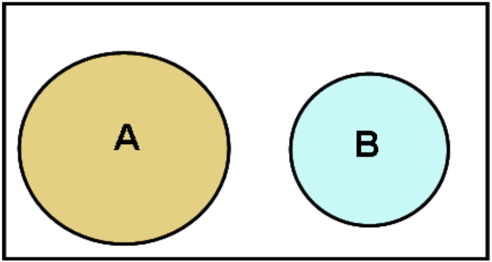
Sucesos: conceptos básicos

Intersección de sucesos: Si A y B son dos sucesos del espacio muestral Ω, entonces la intersección, $A \cap B$, es el conjunto de todos los sucesos de Ω que están en A y en B.



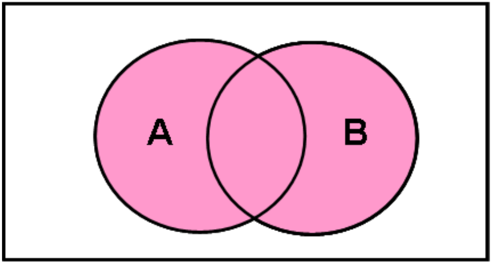
Sucesos: conceptos básicos

A y B son sucesos incompatibles si no tienen ningún suceso elemental en común i.e., el conjunto $A \cap B$ es vacío



Sucesos: conceptos básicos

Unión de sucesos: Si A y B son dos sucesos de un espacio muestral Ω, entonces la unión, $A \cup B$, es el conjunto de todos los sucesos de Ω que pertenecen a cualquiera de los dos, A ó B.



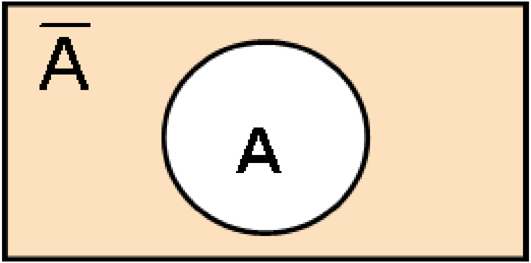
Sucesos: conceptos básicos

Sucesos triviales:

- Suceso seguro Ω: conjunto = espacio muestral
- Suceso imposible $\emptyset$: conjunto = conjunto vacío

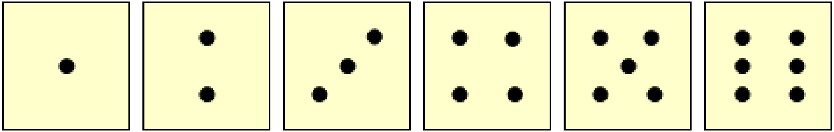
Complementario

El complementario de un suceso A es el conjunto de todos los sucesos elementales de Ω que no están en A.



Ejemplo: lanzamiento de un dado

Consideremos el experimento aleatorio "resultado observado al lanzar un dado":



- suceso elemental: el 1, el 2, el 3, el 4, el 5, el 6
- espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- suceso: $A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{4, 5, 6\}$

El suceso A es "sale un número par".
El suceso B es "sale un número mayor que tres".

Ejemplo: lanzamiento de un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{4, 5, 6\}$$

- Complementario:

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\} \qquad \bar{B} = \{1, 2, 3\}$$

- Intersección:

$$A \cap B = \{4, 6\} \qquad \bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 3\}$$

- Unión:

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \qquad \bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$A \cup \bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

- Sucesos incompatibles:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Probabilidad. Intuición

La probabilidad es una medida subjetiva sobre la incertidumbre de que suceda cierto suceso.

Al tirar un dado:

- la probabilidad de que salga un 1 es más pequeña que la probabilidad de que salga un número mayor que uno
- la probabilidad de que salga un 4 es igual que la probabilidad de que salga un 6.
- la probabilidad de que salga un 7 es cero
- la probabilidad de que salga un número positivo es uno

Tres enfoques/interpretaciones

Probabilidad clásica

Considera un experimento para el que todos los sucesos elementales son equiprobables. Si tenemos k sucesos elementales,

$$P(A) = \frac{1}{k} \times \text{tamaño de A}$$

Enfoque frecuentista

Si repetiéramos el experimento muchas veces, la frecuencia con que ocurre el suceso sería una aproximación de la probabilidad.

$$\boxed{\text{Probabilidad – el valor límite de la frecuencia}}$$

Probabilidad subjetiva

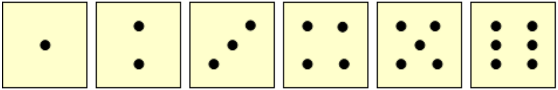
Depende de la información que tengamos en ese momento.

$$\boxed{\text{Probabilidad – creencia o certeza de que ocurra}}$$

Propiedades de la probabilidad

- $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Sea $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, entonces $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i)$.
- $P(\Omega) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$.
- Complementario: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A y B son incompatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo: lanzamiento de un dado



- Probabilidad de un suceso elemental: $P(e_i) = \frac{1}{6}$
- Probabilidad de que salga par: $A = \{2, 4, 6\}$, luego

$$P(A) = P(''2'') + P(''4'') + P(''6'') = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

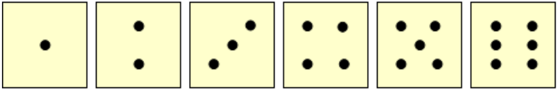
- Probabilidad de que salga mayor que 3: $B = \{4, 5, 6\}$, luego

$$P(B) = P(''4'') + P(''5'') + P(''6'') = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

- Probabilidad de que salga impar

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: lanzamiento de un dado



- Probabilidad de que salga par o mayor que tres

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como $A \cap B = \{4, 6\}$, entonces $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- Probabilidad de que salga par o igual a uno.
Los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$ y $C = \{1\}$ son incompatibles ($A \cap C = \emptyset$) por tanto

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo: probabilidad condicional

Se clasifica un grupo de 100 ejecutivos de acuerdo a su peso y a si sufren o no de hipertensión. La tabla muestra el número de ejecutivos en cada categoría.

	Insuficiente	Normal	Sobrepeso	Total
Hipertenso	2	8	10	20
Normal	20	45	15	80
Total	22	53	25	100

- Si se elige un ejecutivo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga hipertensión?

$$P(H) = \frac{20}{100} = 0,2$$

- Si se elige a una persona al azar, y se descubre que tiene sobrepeso, ¿cuál es la probabilidad de que tenga hipertensión? ¿Es la misma que antes?

Ejemplo: probabilidad condicional

Probabilidad de que sea hipertenso, sabiendo que tiene sobrepeso:

$$P(H|S)$$

Para calcularla, nos fijamos sólo en los ejecutivos con sobrepeso:

$$P(H|S) = \frac{10}{25} = 0,4$$

¿Por qué? es como si eligiese la persona al azar sólo entre los que tienen sobrepeso.

La probabilidad condicional, (o probabilidad condicionada) es la probabilidad de que ocurra un evento, dado que otro evento ha ocurrido.

Probabilidad condicional

Probabilidad condicional

Sean dos sucesos A y B, la probabilidad condicionada de A dado B es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ley de la multiplicación

Se tiene que

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Independencia

Se dice que dos sucesos A y B son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Además, $P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$.

Ejemplo

De una baraja española, saco dos cartas. Probabilidad de que:

- la primera carta sea copa: $P(A) = \frac{10}{40}$.
- la segunda sea copa, sabiendo que la primera lo fue: $P(B|A) = \frac{9}{39}$.
- las dos cartas sean copas: $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{9}{39}\frac{10}{40}$.

Tiro dos dados. Probabilidad de que:

- en el primer dado salga un uno: $P(C) = \frac{1}{6}$.
- en el segundo dado salga un uno, sabiendo que en el primero salió uno: $P(D|C) = P(D) = \frac{1}{6}$.
- en el primer dado salga un uno, si en el segundo salió uno: $P(C|D) = P(C) = \frac{1}{6}$.
- en los dos dados salga uno: $P(C \cap D) = P(D)P(C) = \frac{1}{6}\frac{1}{6}$ (sucesos independientes)

Ley de la probabilidad total

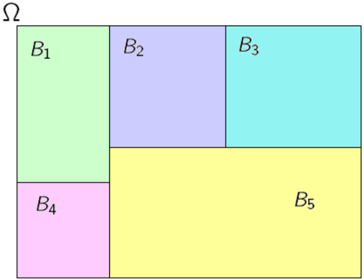
Un conjunto de sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son mutuamente excluyentes si

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \qquad \forall i \neq j.$$

Si además de eso cumplen

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k,$$

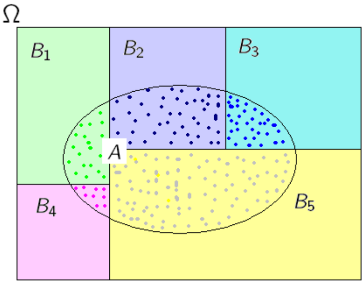
se dice que forman una partición del espacio muestral.



Ley de probabilidad total

Dada una partición del espacio muestral, $B_1, B_2, \ldots, B_k$, y dado un suceso A, se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k) = \\
&= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)P(B_k).
\end{aligned}
$$



Ejemplo: probabilidad total

En una fábrica se embalan galletas en cuatro cadenas de montaje: A1, A2, A3, y A4. El 35% de la producción total se embala en la cadena A1, el 20%, 24% y 21% en las cadenas A2, A3 y A4 respectivamente.
Los datos indican que no se embalan correctamente un porcentaje pequeño de las cajas: el 1% en la cadena de montaje A1, el 3% en A2, el 2.5% en A3 y el 2% en A4.
¿Cuál es la probabilidad de que una caja elegida al azar de la producción total sea defectuosa (suceso D)?

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) + P(D \cap A_4) \\
&= P(D|A_1)P(A_1) + P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3) + P(D|A_4)P(A_4) \\
&= 0'01 \times 0'35 + 0'03 \times 0'20 + 0'025 \times 0'24 + 0'02 \times 0'21 = 0'0197.
\end{aligned}
$$

Teorema de Bayes

Para dos sucesos A y B se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Ejemplo: (continuación del anterior) Supongamos que descubrimos una caja defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la caja haya sido embalada en la cadena de montaje A1?

$$P(A_1|D) = \frac{P(D|A_1)P(A_1)}{P(D)} =$$

$$= \frac{0.01 \times 0.35}{0.0197} = 0.17766$$

Variables aleatorias

- Variable aleatoria.
- Variables discretas:
  - Función de probabilidad (f. de masa)
  - Función de distribución
- Variables continuas:
  - Función de distribución
  - Función de densidad
- Esperanza, varianza, desv. típica.

Variables aleatorias

Variable aletoria: concepto

Una variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio.

Ejemplo

Lanzar un dado una vez. Sea la v.a. $X =$ resultado de la tirada.
¿cuántos sucesos elementales hay? ¿qué valores puede tomar X?

Se denotan las v.a. con letras mayúsculas, y sus posibles valores con letras minúsculas.

Variables aleatorias

V.a. discreta

Una variable aleatoria es discreta si toma un número finito o numerable de valores.

V.a. continua

Una variable aleatoria es continua si toma un número infinito no numerable de valores (por ejemplo, en un intervalo de $\mathbb{R}$).

Ejemplos

- $X =$"resultado al tirar un dado" es una variable discreta.
- $Y =$ "altura de un alumno elegido al azar" es una variable continua.

Variables aleatorias discretas

Función de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Se llama función de probabilidad o función de masa, al conjunto de probabilidades con las que X toma cada uno de sus valores, es decir, $p_i = P[X = x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots$.

Ejemplo

$X =$ resultado de lanzar un dado. La función de probabilidad es

x	1	2	3	4	5	6
$P[X = x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Variables aleatorias discretas

Función de probabilidad. Propiedades

- $0 \leq P[X = x_i] \leq 1.$
- $\displaystyle\sum_i P[X = x_i] = 1.$
- $P[X \leq x] = \displaystyle\sum_{i, x_i \leq x} P[X = x_i].$
- $P[X > x] = 1 - P[X \leq x].$

Variables aleatorias discretas

Función de distribución

La función de distribución (acumulada) de una variable aleatoria X es la función $F(x) = P[X \leq x]$. Está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y no sólo para los valores de X.

Ejemplo

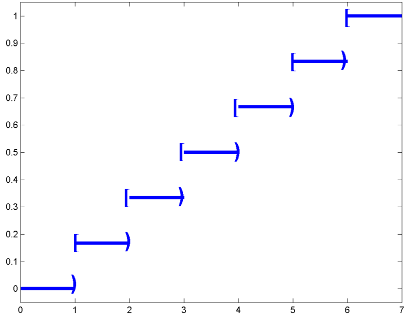
$X =$ resultado de lanzar un dado. La función de distribución es

x	1	2	3	4	5	6
$P[X = x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

Variables aleatorias discretas

Propiedades

- $F(-\infty) = 0$.
- $F(\infty) = 1$.
- Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$.

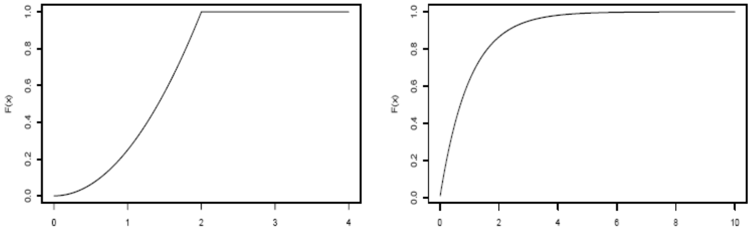


Para X discreta, la función de distribución es de tipo escalón. Cada escalón corresponde a un valor posible de X y el salto corresponde a la probabilidad.

Variables aleatorias continuas

Función de distribución

Para X v.a. continua, la función de distribución es la función $F(x) = P[X \leq x], \forall x \in \mathbb{R}$



No son funciones de tipo escalón, sino suaves.

Variables aleatorias continuas

Propiedades

- $F(-\infty) = 0$.
- $F(\infty) = 1$.
- Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$.
- $F(x)$ es continua.

La función de probabilidad no tiene sentido en variables aleatorias continuas, porque

$$P(X = x) = 0$$

Para sustituir la función de probabilidad, en variables aleatorias continuas usaremos la función de densidad.

Variables aleatorias continuas

Función de densidad

Para una variable aleatoria continua X con función de distribución $F(x)$, la función de densidad de X es:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

Propiedades

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Variables aleatorias continuas

Ejemplo

Una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$P(X \leq 0'5) = \int_{-\infty}^{0'5} f(u)du = \int_{0}^{0'5} 12u^2(1-u)du = 0'3125$$

$$P(0'2 \leq X \leq 0'5) = \int_{0'2}^{0'5} f(u)du = \int_{0'2}^{0'5} 12u^2(1-u)du = 0'2853$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

X v.a. discreta que toma valores $x_1, x_2, \ldots$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E[X]} &= \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) \\ \mathrm{Var[X]} &= E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 \cdot P(X = x_i) \\ &= \sum_i x_i^2 \cdot P(X = x_i) - E[X]^2 \end{aligned}$$

X v.a. continua que toma valores en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E[X]} &= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx \\ \mathrm{Var[X]} &= E[(X - E[X])^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2 \cdot f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x) dx - E[X]^2 \end{aligned}$$

Algunos modelos probabilísticos

Modelos discretos

- Ensayos de Bernoulli
- Distribución Binomial
- Distribución de Poisson

Modelos continuos

- Distribución normal
- Distribuciones asociadas a la normal

Modelo Bernoulli

Descripción.

Partimos de un experimento aleatorio con sólo dos posibles resultados, que calificamos de éxito/fracaso.
Definimos la variable aleatoria:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si éxito} \\ 0 & \text{si fracaso} \end{cases}$$

Sea p la probabilidad de éxito.

El experimento se llama ensayo de Bernoulli y la variable aleatoria se dice que sigue una distribución Bernoulli de parámetro p.

Se escribe $X \sim Ber(p)$.

Modelo Bernoulli

Ejemplo

Tirar una moneda al aire

$$X = \begin{cases} 1 & \text{sale cara} \\ 0 & \text{si sale cruz} \end{cases}$$

Es un ensayo Bernoulli, y X sigue una distribución Bernoulli de parámetro $1/2$.

Ejemplo

Una línea aérea estima que los pasajeros que compran un billete para un vuelo tienen una probabilidad igual a $0,05$ de no presentarse al embarque de dicho vuelo.
Definamos

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el pasajero se presenta} \\ 0 & \text{si no lo hace} \end{cases}$$

Y sigue una distribución Bernoulli con parámetro $0,95$.

Modelo Bernoulli

Función de Probabilidad:

$$P[X = 0] = 1 - p \quad P[X = 1] = p$$

Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Propiedades

- $\mathrm{E}[X] = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $\mathrm{E}[X^2] = p \times 1^2 + (1 - p) \times 0^2 = p$
- $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $\sigma[X] = \sqrt{p(1 - p)}$

Modelo Binomial

Descripción

Un ensayo Bernoulli de parámetro p se repite n veces de manera independiente. La variable *número de éxitos obtenidos*, sigue una distribución Binomial (de parámetros n y p).

Definición

Una variable X sigue una distribución binomial con parámetros n y p si

$$P[X=x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

para $x = 0, 1, \ldots, n$ donde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Se escribe $X \sim B(n, p)$.

Modelo Binomial

Ejemplo

La línea aérea del ejemplo anterior ha vendido 80 billetes para un vuelo. La probabilidad de que un pasajero no se presente al embarque es de $0,05$. Definimos $X =$ *número de pasajeros que se presentan*. Entonces (suponiendo independencia)

$$X \sim B(80, 0, 95)$$

- La probablidad de que los 80 pasajeros se presenten

$$P[X = 80] = \binom{80}{80} 0,95^{80} \times (1 - 0,95)^{80-80} = 0,0165$$

- La probabilidad de que al menos un pasajero no se presente:

$$P[X < 80] = 1 - P[X = 80] = 1 - 0,0165 = 0,9835$$

Modelo Binomial

Propiedades

- $\mathrm{E}[X] = np$
- $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$
- $\sigma[X] = \sqrt{np(1-p)}$

Distribución de Poisson: sucesos raros

Descripción

Modela el número de sucesos *raros* que ocurren en un determinado periodo de tiempo o en una cantidad de espacio determinada.
Ejemplos: llamadas de telefono en una hora, erratas en una página, accidentes de tráfico, ...

Definición

Una variable X sigue una distribución Poisson de parámetro λ si

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Se escribe $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Distribución de Poisson: sucesos raros

Propiedades

- $\mathrm{E}[X] = \lambda$
- $\mathrm{Var}[X] = \lambda$
- $\sigma[X] = \sqrt{\lambda}$

Propiedad de la Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y representa el número de sucesos raros en una unidad de tiempo, e Y es una variable aleatoria que representa el número de dichos sucesos raros en un tiempo t, se tiene que:

$$Y \sim \mathcal{P}(t\lambda)$$

Distribución de Poisson: sucesos raros

Ejemplo

El número medio de erratas por transparencias es de 0,2. Es decir, si X es el número de erratas por transparencia, entonces

$$X \sim \mathcal{P}(0,2)$$

¿Cuál es la probabilidad de que en una transparencia no haya erratas?

$$P[X=0] = \frac{0,2^0 e^{-0,2}}{0!} = e^{-0,2} = 0,8187.$$

¿Cuál es la probabilidad de que en 4 transparencias haya exactamente una errata?
Sea Y el número de erratas en 4 transparencias. Sabemos que

$$\begin{aligned} Y &\sim \mathcal{P}(0,2 \cdot 4) = \mathcal{P}(0,8) \\ P[Y=1] &= \frac{0,8^1 e^{-0,8}}{1!} = 0,8e^{-0,8} = 0,3595. \end{aligned}$$

Distribución normal

Descripción

Es la más conocida y utilizada

Definición

Se dice que una variable X sigue una distribución normal o gausiana con parámetros μ y σ, si

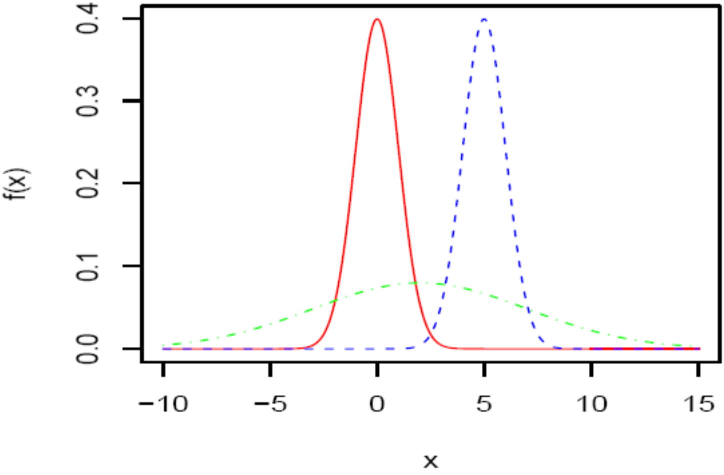
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\}$$

Se escribe $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Su media es μ y su desviación típica es σ.

Distribución normal

Función de densidad para 3 valores distintos de μ y σ



Distribución normal

Propiedad

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,683$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,955$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Cota de Chebyshev

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Distribución normal

Transformación lineal

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces

$$Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, |a|\sigma)$$

Estandarización

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, considero

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Se llama distribución normal estándar.

Teorema central del límite

El siguiente teorema nos habla de la distribución de la media de un conjunto de muchas v.a. independientes e igualmente distribuidas:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Teorema

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuidas con media μ y desviación típica σ (ambas finitas). Si n es suficientemente grande, se tiene que

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

La idea es que la suma de muchas variables independientes e iguales, tiene una distribución normal.

Aproximaciones

Binomial

Si $X \sim B(n, p)$ con n suficientemente grande

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ con λ suficientemente grande

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Distribuciones asociadas a la normal

χ^2 (*Chi cuadrado*)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuidas según $\mathcal{N}(0,1)$. La distribución de

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

se llama distribución χ^2 con n grados de libertad.

- $\mathrm{E}[S] = n$
- $\mathrm{Var}[S] = 2n$

Distribuciones asociadas a la normal

t de Student

Sean $Y, X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuidas según $\mathcal{N}(0, 1)$. La distribución de

$$T = \frac{Y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n}}$$

se llama distribución t de Student con n grados de libertad.

- $\mathrm{E}[T] = 0$
- $\mathrm{Var}[T] = \frac{n}{n-2}$

Distribuciones asociadas a la normal

$F_{n,m}$ de Fisher

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_m$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuidas según $\mathcal{N}(0,1)$. La distribución de

$$F = \frac{m}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{m} Y_i^2}$$

se llama distribución $F_{n,m}$ de Fisher con n y m grados de libertad.

- $\mathrm{E}[F] = \dfrac{m}{m-2}$ (para $m > 2$)
- $\mathrm{Var}[F] = \dfrac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ (para $m > 4$)
- $\dfrac{1}{F} \sim F_{m,n}$