HOJA DE EJERCICIOS 6

1.- Sean $X_1, \dots\dots, X_n$ e $Y_1, \dots\dots\dots\dots, Y_m$ las dos muestras extraídas.

Sean $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$ $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n+m}(\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j)$

Se cumple: E [$\hat{\mu}_1$] = E [$\hat{\mu}_2$] = E [$\hat{\mu}_3$] = μ , luego los tres estimadores de la media poblacional μ son centrados. Además, se tiene que

$$V[\hat{\mu}_1] = \frac{\sigma^2}{n} \qquad V[\hat{\mu}_2] = \frac{\sigma^2}{m} \qquad V[\hat{\mu}_3] = \frac{\sigma^2}{n+m}$$

Por lo tanto, claramente V [$\hat{\mu}_3$] < V [$\hat{\mu}_1$] y V [$\hat{\mu}_3$] < V [$\hat{\mu}_2$] por lo tanto $\hat{\mu}_3$ es más eficiente que cualquiera de los otros dos.

2.-

a) E[T_1] = E [$\frac{X_1 + 4X_2}{5}$] = $\frac{1}{5}(\mu + 4\mu) = \mu$ T_1 es insesgado

E [T_2] = E [$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{3}$] = $\frac{4}{3}\mu \neq \mu$ $\Rightarrow$ sesgo (T_2) = $\frac{4}{3}\mu - \mu$ = $\frac{1}{3}\mu$

b) E.C.M. [T_1] = V [T_1] = V [$\frac{X_1 + 4X_2}{5}$] = $\frac{17}{25}k\ \mu^2$

E.C.M [T_2] = V [T_2] + $(\frac{1}{3}\mu)^2$ = $\frac{4k}{9}\mu^2 + \frac{1}{9}\mu^2$ = $\frac{\mu^2}{9}(1+4k)$

c) E.C.M [T_2] < E.C.M. [T_1] $\Leftrightarrow$ $\frac{\mu^2}{9}(1+4k) < \frac{17}{25}k\ \mu^2$ $\Leftrightarrow$ k > $\frac{25}{53}$

3.-

a) E[S^2] = σ^2 $\Rightarrow$ E[$\hat{\sigma}^2$] = $\lambda\ \sigma^2 + (1 - \lambda)\ \sigma^2$, $\forall\lambda$

b) V [$\hat{\sigma}^2$] = V[$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$] = V [χ^2_{n-1}] = 2(n-1) $\Rightarrow$ V[S^2] = $\frac{2\sigma^4}{n-1}$

$$V[\hat{\sigma}^2] = \lambda^2 \frac{2\sigma^4}{n_1 - 1} + (1-\lambda)^2 \frac{2\sigma^4}{n_2 - 1}$$

$$\frac{d}{\partial \lambda} V[\hat{\sigma}^2] = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$$

$\frac{d^2}{\partial^2 \lambda} V[\hat{\sigma}^2] > 0 \Rightarrow$ es efectivamente un mínimo.

4.-

a) $E[\hat{\mu}_1] = \frac{1}{4} E[X_1] + \frac{1}{2(n-2)} E[\sum_{i=2}^{n-1} X_i] + \frac{1}{4} E[X_n] = \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2(n-2)}(n-2)\mu + \frac{1}{4}\mu = \mu$

$E[\hat{\mu}_2] \; \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$

b) $V[\hat{\mu}_1] = \frac{1}{16} V[X_1] + \frac{1}{4(n-2)^2} V[\sum_{i=2}^{n-1} X_i] + \frac{1}{16} V[X_n] = \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{1}{4(n-2)^2}$ (n-2) σ^2 $+ \frac{1}{16}\sigma^2 = \frac{n}{8(n-2)} . \sigma^2$

$V[\hat{\mu}_2] = \frac{1}{n^2} V[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$.

La eficiencia relativa de $\hat{\mu}_2$ respecto de $\hat{\mu}_1$ viene dada por el cociente:

$V[\hat{\mu}_1] / V[\hat{\mu}_2] = (\frac{n}{8(n-2)} . \sigma^2) : (\frac{1}{n}\sigma^2) = \frac{n^2}{8(n-2)}$

c) Como son estimadores insesgados:

E.C.M $[\hat{\mu}_1] = V[\hat{\mu}_1] = \frac{n}{8(n-2)} . \sigma^2$

E.C.M$[\hat{\mu}_2] = V[\hat{\mu}_2] = \frac{1}{n}\sigma^2$.

5.-

a) El estimador $\hat{\mu}_1$ es sesgado puesto que E($\hat{\mu}_1$)=μ+1/3μ

El estimador $\hat{\mu}_2$ es insesgado puesto que E($\hat{\mu}_2$)=μ.

El estimador $\hat{\mu}_1$ es más eficiente que $\hat{\mu}_2$ puesto que su varianza es menor.
Calculo el error cuadrático medio de los dos estimadores y obtengo lo siguiente:

ECM($\hat{\mu}_1$)=V($\hat{\mu}_1$)+sesgo^2 ($\hat{\mu}_1$)=31+$\frac{1}{9}\mu^2$

ECM($\hat{\mu}_2$)=V($\hat{\mu}_2$)+sesgo^2 ($\hat{\mu}_2$)=81

Como el parámetro μ sólo puede tomar un valor entre 0 y 10, el ECM($\hat{\mu}_1$)<ECM($\hat{\mu}_2$), por lo que finalmente elegiría el estimador $\hat{\mu}_1$.

b)

$$L(x_1,\dots,x_5;\mu)=\left(\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\right)^5 e^{-\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{5}(xi-\mu)^2}$$

$$\hat{\mu}_{mv}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}$$

Comprobamos que el estimador calculado es máximo.

$$\frac{d^2}{d\mu^2}=-\frac{5}{9}<0$$

c) El estimador máximo verosímil es preferible a los propuestos puesto que es insesgado y tiene una menor varianza.

6.- E(X)= $\frac{\theta}{3}$. Se comprueba que E(θ*)=E(3 $\bar{X}$)=3 E($\bar{X}$)=3 E(X)=3 $\frac{\theta}{3}$=θ, por lo tanto, es insesgado.

7.-

a) Los dos son insesgados ya que E(μ_1)= μ y E(μ_2)= μ.
b) Es más eficiente μ_1 ya que Var(μ_1) < Var(μ_2).
c) $\mu_3=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ es insesgado y más eficiente que los otros dos.

8.-

a) La media muestral no es un estimador insesgado puesto que $E(\bar{X})=\frac{\theta}{2}\neq\theta$
b) Para que el estimador sea insesgado es necesario que K=2.