Estadística I

Hoja de Ejercicios 6

Ejercicio 1. De una población con media μ y varianza σ^2 se extraen dos muestras aleatorias simples de tamaños n y m e independientes entre sí. Demuéstrese que la estimación de μ obtenida como la media muestral de las n + m observaciones es más eficiente que la estimación que se obtendría como la media muestral correspondiente a cualquiera de las dos muestras.

Ejercicio 2. Para una muestra $X_1, \ldots, X_4$ de una población de media μ y varianza kμ^2 considérense los siguientes estimadores de μ:

$$T_1 = \frac{X_1 + 4X_2}{5} \qquad T_2 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{3}$$

a) Calcular el sesgo de T_1 y T_2.
b) Calcular el E.C.M. de T_1 y T_2.
c) ¿Para qué valores de k es el estimador T_2 mejor que T_1 de acuerdo al criterio del E.C.M.?

Ejercicio 3. Sea ($X_1, \ldots\ldots X_{n_1}$) una muestra aleatoria simple de la variable aleatoria X, que se distribuye como una N(μ_1, σ^2). Sea ($Y_1, \ldots\ldots, Y_{n_2}$) una muestra aleatoria simple de la variable aleatoria Y, que se distribuye como una N(μ_2, σ^2). X e Y son independientes. Se quiere estimar σ^2 y para ello se consideran combinaciones lineales de las cuasi-varianzas muestrales S_1^2 y S_2^2, es decir,

$$\hat{\sigma}^2 = \lambda S_1^2 + (1 - \lambda) S_2^2, \text{ donde } 0 \le \lambda \le 1$$

a) Demostrar que este estimador es centrado para cualquier valor de λ.
b) Determinar qué valor de λ define el estimador $\hat{\sigma}^2$ más eficiente.

Ejercicio 4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población de media μ y varianza σ^2. Considérense los siguientes estimadores de μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{(n-2)}\sum_{i=2}^{n-1} X_i + \frac{X_n}{4} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

a) Demostrar que los dos estimadores son insesgados.
b) Determinar la eficiencia relativa de $\hat{\mu}_2$ respecto de $\hat{\mu}_1$.
c) Calcular el error cuadrático medio de los dos estimadores.

Ejercicio 5. La nota final en la asignatura de Estadística I es una variable aleatoria cuya distribución sigue una Normal con desviación típica poblacional de 3. Para estimar la media poblacional tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 5 ($X_1,\ldots X_5$) y proponemos los siguientes estimadores:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{x_1 - 2x_2 + 5x_4}{3}$$
$$\hat{\mu}_2 = x_2 - 2x_3 + 2x_5$$

a) ¿Cuál de los dos estimadores propuestos es preferible para estimar la media poblacional? Comprobar las propiedades de insesgadez y eficiencia.
b) Estimar la media poblacional por el Método de Máxima Verosimilitud.
c) ¿Es el estimador obtenido en el apartado anterior mejor que los propuestos?. ¿Por qué?

Ejercicio 6. Considere una variable aleatoria X cuya función de densidad es

$$f(x) = 0{,}5(1+\theta x) \quad -1 \le x \le 1,$$

donde θ es un parámetro desconocido. (Esta distribución aparece en física de partículas). Demuestre que el estimador $\theta^*=3\bar{x}$ es un estimador insesgado de θ.

Ejercicio 7. Sea X1,..., X3 una muestra aleatoria de una población de media μ desconocida y varianza σ^2. Considérense los siguientes estimadores de μ:

$$\mu_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6} \qquad \mu_2 = \frac{X_1 + 4X_2 + X_3}{6}$$

a) Probar que los dos estimadores son insesgados.
b) ¿Cuál de los dos estimadores es más eficiente?
c) Encontrar un estimador de μ que sea más eficiente que los estimadores propuestos.

Ejercicio 8. Se considera una población representada por una variable aleatoria X, de forma que la distribución poblacional viene definida por la función de densidad:

$f(x,\theta) = 1/\theta \quad$ para $0 \le X \le \theta$

Si estimamos el parámetro θ a través de:

a) la media muestral, ¿es insesgado dicho estimador?
b) θ^* definido así: $\theta^* = k\,\bar{x}$. Determinar el valor de k para que θ^* sea un estimador insesgado de θ.