Estadística I
Tema 4: Variables aleatorias multidimensionales

Grado en Administración de Empresas 08/09

1. *a*) X puede tomar los valores 3, 4, 5 y 6. Y puede tomar los valores 1 y 2.

   b) La distribución marginal de X es:
   Hallamos las probabilidades:

$$\begin{aligned}
P[X=3] &= P[I_1=1, I_2=1, I_3=1] = \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{27} \\
P[X=4] &= P[I_1=2, I_2=1, I_3=1] + P[I_1=1, I_2=2, I_3=1] + P[I_1=1, I_2=1, I_3=2] = \\
&\quad 3\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{9} \\
P[X=5] &= P[I_1=2, I_2=2, I_3=1] + P[I_1=1, I_2=2, I_3=2] + P[I_1=2, I_2=1, I_3=2] = \\
&\quad 3\tfrac{2}{3}\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{9} \\
P[X=6] &= P[I_1=2, I_2=2, I_3=2] = \tfrac{2}{3}\tfrac{2}{3}\tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{27}
\end{aligned}$$

   Escribimos la tabla:

X	3	4	5	6
	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

   c) La variable bivariante puede tomar los valores $(3,1)$, $(4,1)$, $(5,1)$, $(6,2)$.

   d) La distribución conjunta es:

$X \setminus Y$	1	2
3	$\frac{1}{27}$	0
4	$\frac{2}{9}$	0
5	$\frac{4}{9}$	0
6	0	$\frac{8}{27}$

   e) La distribución marginal de Y es:

Y	1	2
	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

   f)

$$E[X] = 3 \times \frac{1}{27} + 4 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{4}{9} + 6 \times \frac{8}{27} = \frac{3+24+60+48}{27} = \frac{135}{27} = 5$$

$$V[X] = 9 \times \frac{1}{27} + 16 \times \frac{2}{9} + 25 \times \frac{4}{9} + 36 \times \frac{8}{27} - 5^2 = \frac{9+96+300+288}{27} - 25 = 0.6666$$

$$SD[X] = \sqrt{0.666} = 0.8165$$

   g)

$$E[Y] = 1 \times \frac{19}{27} + 2 \times \frac{8}{27} = \frac{35}{27}$$

$$V[Y] = 1^2 \times \frac{19}{27} + 2^2 \times \frac{8}{27} - \left(\frac{35}{27}\right)^2 = \frac{41}{27} - \frac{1225}{729} = 1.888888889 - 1.680384088 = 0.208504801$$

$$SD[Y] = \sqrt{0.208504801} = 0.456623259$$

   h) No, porque, por ejemplo $P[X=3] \times P[Y=1] = \frac{1}{27} \times \frac{19}{27}$ es distinto de $P[X=3, Y=1] = \frac{1}{27}$.

i)

$$\begin{array}{rl} Cov(X,Y) & = E[X\cdot Y]-E[X]\cdot E[Y] = \\ & 3\times 1\times \frac{1}{27}+3\times 2\times 0+4\times 1\times \frac{2}{9}+4\times 2\times 0+ \\ & 5\times 1\times \frac{4}{9}+5\times 2\times 0+6\times 1\times 0+6\times 2\times \frac{8}{27}-5\times \frac{35}{27} = \\ & \frac{183-175}{27}=\frac{8}{27} \end{array}$$

j) La distribución condicionada dado que $X = 3$ es:

$Y\|X=3$	1	2
$P[Y=y\|X=3]$	1	0

k)

$$E[Y|X=3]=1, \quad V[Y|X=3]=0$$

l)

$$E[X-Y]=E[X]-E[Y]=5-\frac{35}{27}=3.703703704$$

2. *a*) Función de densidad de X:

$$\begin{array}{rcl} f_X(x) & = & \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^{\infty} 2xe^{-y}dy=2x\int_0^{\infty} e^{-y}dy \\ & = & 2x[-e^{-y}]_0^{\infty}=2x, \text{ si } 0\le x\le 1. \end{array}$$

Función de densidad de Y:

$$\begin{array}{rcl} f_Y(y) & = & \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^{1} 2xe^{-y}dx=e^{-y}\int_0^{1} 2xdx \\ & = & e^{-y}[x^2]_0^1=e^{-y}, \text{ si } 0\le y. \end{array}$$

b) X e Y son independientes, ya que

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad \forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}.$$

c) Para calcular la probabilidad que nos piden, antes tenemos que calcular la función de densidad condicionada de X cuando $Y = 8$:

$$f(x|Y=8) \;=\; \frac{f(x,0.8)}{f_Y(0.8)}=\frac{2x\,e^{-8}}{e^{-8}}=2x, \text{ si } 0\le x\le 1.$$

o simplemente, como X e Y son independientes, la función de densidad de X condicionada a cualquier valor de Y es su función de densidad marginal.
Entonces, la probabilidad de que la proporción del citado componente sea inferior a 0.3, cuando el tiempo de fabricación ha sido de 0.8 minutos:

$$\begin{array}{rcl} P[X<0.3|Y=0.8] & = & P[X<0.3]=\int_0^{0.3} f(x|Y=8)dx=\int_0^{0.3} f_X(x)dx= \\ & = & \int_0^{0.3} 2xdx=[x^2]_0^{0.3}=0.3^2=0.09. \end{array}$$