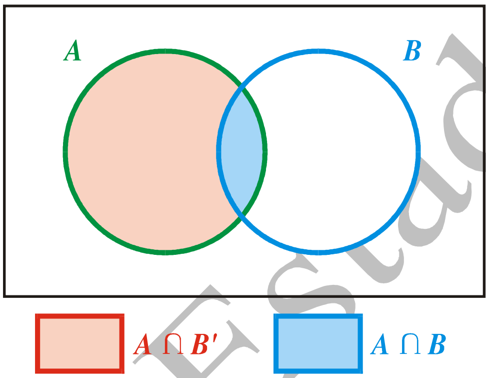
1.

a) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16}
   B = {3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
   C = {2, 3, 5, 7, 11, 13}
   D = {3, 5, 7}

b) B = $\overline{A}$;   D $\subset$ C

c) A $\cup$ B = Ω (Espacio muestral);   C $\cap$ D = D

2.



$P[A] = P[A \cap \overline{B}] + P[A \cap B] = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$
$P[B] = 1 - P[\overline{B}] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}8$

3.

a)
$P[\overline{B}] = 1 - P[B] = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad P[B] = 0{,}4$
$P[\overline{A} \cap \overline{B}] = P[\overline{A \cup B}] = 1 - P[A \cup B] = 0{,}25 \quad \rightarrow P[A \cup B] = 0{,}75$
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \quad \rightarrow \quad 0{,}75 = 0{,}5 + 0{,}4 - P[A \cap B] \quad \rightarrow \quad P[A \cap B] = 0{,}15$
Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} P[A]\cdot P[B] = 0{,}5\cdot 0{,}4 = 0{,}2 \\ P[A\cap B] = 0{,}15 \end{array}\right\} P[A\cap B] \neq P[A]\cdot P[B]$$

Luego, A y B no son independientes.

4.

Tenemos que hallar la probabilidad de que ocurra el siguiente suceso:
A = "el opositor conoce, al menos, uno de los tres temas"
Para calcularla, utilizaremos el complementario. Si sabe 35 temas, hay 85 - 35 = 50 temas que no sabe; entonces:

$P[A] = 1 - P[\overline{A}] = 1 - P$["no sabe ninguno de los tres"] =

$= 1 - \frac{50}{85} \cdot \frac{49}{84} \cdot \frac{48}{83} = 1 - 0{,}198 = 0{,}802$

Por tanto, la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas es de 0,802.

5.

Organizamos la información en una tabla de doble entrada, completando los datos que faltan:

	DEBATE	NO DEBATE	
PELÍCULA	1 450	650	2 100
NO PELÍCULA	50	350	400
	1 500	1 000	2 500

Llamamos $D =$ "Vio el debate" y $P =$ "Vio la película".

a) $P[D \cap P] = \frac{1\,450}{2\,500} = \frac{29}{50} = 0{,}58$

b) $P[P/D] = \frac{1\,450}{1\,500} = \frac{29}{30} = 0{,}97$

c) $P[D/P] = \frac{1\,450}{2\,100} = \frac{29}{42} = 0{,}69$

6.

Utilizamos la siguiente notación para los sucesos:

1U: la urna elegida es la primera.

2U: la urna elegida es la segunda.

B: la bola extraida es blanca.

a) Por la ley de la probabilidad total sabemos que:

P(B)=P(B|1U)P(1U)+P(B|1U)P(1U)=3/10 • ½ + 3/8 • ½ =27/80.

b) Por el teorema de Bayes sabemos que:

P(1U|B)=P(B|1U)P(1U)/P(B)=(3/20)/(27/80)=4/9.

7.

Utilizamos la siguiente notación para los sucesos:

M: el alumno elegido al azar ha aprobado matemáticas. P(M)=18/36.

I: el alumno elegido al azar ha aprobado inglés. P(I)=16/36.

P(no haya aprobado ninguna)=1-P(ha aprobado alguna)=1-P(M U I)=6/36.

a) P(M ∩ I) = P(M) + P(I) - P(M U I)= 18/36 + 16/36 – (1-6/36) = 4/36.

b) P(I|M)=P(I $\cap$ M)/P(M)=(4/36)/(18/36)=4/18=2/9.

c) P(I|M)=2/9≠ P(I)=16/36, por tanto los dos sucesos no son independientes.

8.

a) $P = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52} = 0{,}058$

b) $P = 2 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{5}{39} = 0{,}128$

c) $P = 1 - P[\text{NINGUNA DE OROS}] = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = 1 - \frac{29}{52} = \frac{23}{52} = 0{,}442$

d) $P = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{5}{78} = 0{,}064$

9.

Utilizamos la siguiente notación para los sucesos:

AB: la bola extraida de A es blanca.

AR: la bola extraida de A es roja.

BB: la bola extraida de B es blanca.

a) Por la ley de la probabilidad total sabemos que:

P(BB)=P(BB|AB)P(AB)+P(BB|AR)P(AR)=7/9 • 3/10+ 6/9 • 7/10=63/90=7/10.

b) P(BB $\cap$ AB)=P(BB|AB)P(AB)=7/9 • 3/10=21/9= 7/3.

10.

Primero construyamos el espacio muestral, veamos todas las posibilidades que hay al tirar dos dados y sumamos los resultados:

Suma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) Al tirar dos dados, solo pueden sumar 3 en los siguientes casos: (1,2); (2,1). Así pues, P("la suma sea 3") = P(S=3) = 2/36 = 1/18

b) Al tirar dos dados, que la suma sea un multipo de 3 se da en los siguientes casos: (1,2); (2,1); (1,5); (5,1); (2,4); (4,2); (3,3); (3,6); (6,3); (4,5); (5,4); (6,6). Así pues, P("la suma sea mult. de 3") = P(S=mult. De 3) = 12/36 = 1/3.

11.

Utilizamos la siguiente notación para los sucesos:

E: se estropea un ordenador en el aula.

P: el ordenador es portátil.

M: el ordenador es de sobremesa.

a) Por la ley de la probabilidad total sabemos que:

P(E)=P(E|P)P(P)+P(E|S)P(S)=0.03 • 0.8 + 0.01 • 0.2 =0.026.

b) Por el teorema de Bayes sabemos que:

P(P|E)=P(E|P)P(P)/P(E)=0.03 • 0.8 /0.026=0.9231.

12.

a) Es una distribución binomial con n=100, p=1/6 → B(100, 1/6)
b) No es una binomial, pues la probabilidad de obtener as para la segunda carta es distinta que para la primera (al ser sin reemplazamiento las extracciones).

13.

Si llamamos x = "número de alumnos, de un grupo de 8, que estudian carrera", se trata de una distribución binomial con n = 8, p = 0,65 → B(8; 0,65)

a) $p[x > 0] = 1 - p[x = 0] = 1 - 0{,}35^8 = 0{,}9998 \rightarrow p[x > 0] = 0{,}9998$

b) $p[x > 6] = p[x = 7] + p[x = 8] =$

$$= \binom{8}{7} \cdot 0{,}65^7 \cdot 0{,}35 + \binom{8}{8} \cdot 0{,}65^8 = 8 \cdot 0{,}65^7 \cdot 0{,}35 + 0{,}65^8 = 0{,}169 \rightarrow p[x > 6] = 0{,}169$$

Hallamos la media y la desviación típica:

$$\mu = np = 8 \cdot 0{,}65 = 5{,}2 \rightarrow \mu = 5{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35} = 1{,}35 \rightarrow \sigma = 1{,}35$$

14.

a)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

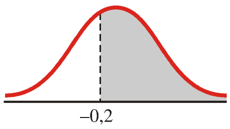
Observar que se trata de una B(5; 0,1) → por ejemplo: $P(x_i=0)=\binom{5}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^5 = 0.9^5 = 0.59049$

b) $\mu = \Sigma\, p_i x_i = 0{,}5 \rightarrow \mu = 0{,}5$

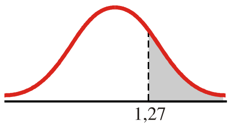
$$\sigma = \sqrt{\Sigma\, p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0{,}7 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}45} = 0{,}67 \rightarrow \sigma = 0{,}67$$

15.

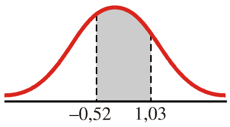
a) $p[z > -0,2] = p[z < 0,2] = 1 - P[z > 0.2] = 1 - 0.4207 = 0,5793$



b) $p[z > 1,27] = 0,1020$



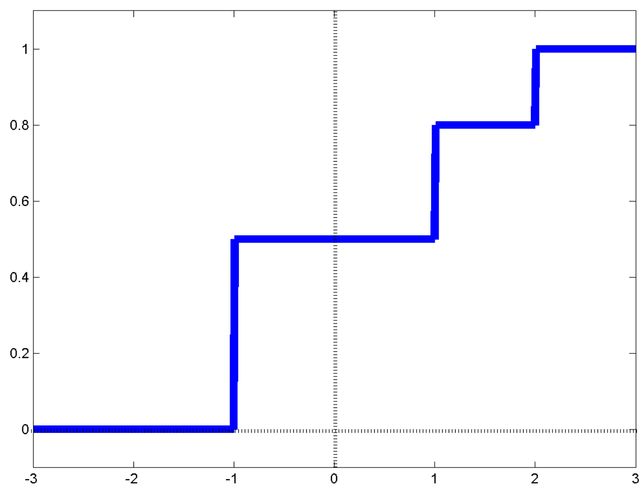
c) $p[-0,52 < z < 1,03] = p[> -0.52] - p[z > 1.03] =$
$p[z < 0.52] - p[z > 1.03] = (1 - p[z > 0,52]) - p[z > 1.03] =$
$= 0,5470$



d) P(Z>a)=0.6 por tanto P(Z<a)=P(Z>-a)=0.4. Buscamos -a en la tabla: -a=0.255, por tanto a= - 0.255.
e) P(Z<b)=0.2 por tanto P(Z>-b)=0.2. Buscamos -b en la table: -b=0.845, por tanto b= - 0.845.

16.

a)



b)

$$P(X=-1)=0{,}5-0=0{,}5$$
$$P(X=1)=0{,}8-0{,}5=0{,}3$$
$$P(X=2)=1-0{,}8=0{,}2$$

c) E[X]= -1 • 0.5 +1 • 0.3 +2 • 0.2=0.2.

d) P(-2<X<1,2)=P(X=-1)+P(X=1) = 0.8.

17.

a) $$\int_0^4 k(x+2)dx=1$$

$$k\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^4=1 \qquad 16k=1 \qquad k=\frac{1}{16}$$

b) Entre 0 y 4 $F(x)=\int \frac{1}{16}(x+2)dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]=\frac{x^2+4x}{32}$

Luego: $F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ \dfrac{x^2+4x}{32} & si\ 0\le x\le 4 \\ 1 & si\ x\ge 4 \end{cases}$

c) $$E(x)=\int xf(x)dx$$

$$E(x)=\int_0^4\frac{1}{16}(x+2)xdx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^4=\frac{1}{16}\left[\frac{64}{3}+16\right]=\frac{1}{16}\cdot\frac{112}{3}=\frac{7}{3}$$

d) $$\operatorname{var}(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=\int x^2 f(x)dx=\int_0^4\frac{1}{16}(x+2)x^2dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^4=\frac{1}{16}\left[64+\frac{128}{3}\right]=\frac{20}{3}$$

$$\operatorname{var}(X)=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$$

e) $$P(2\le X\le 3)=F(3)-F(2)=\frac{9+12}{32}-\frac{4+8}{32}=\frac{9}{32}$$

18.

a) $\int_0^1 (k - x)dx = 1$

$$\left[kx - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \qquad k - \frac{1}{2} = 1 \qquad k = \frac{3}{2}$$

b) Entre 0 y 1 $F(x) = \int \left(\frac{3}{2} - x\right)dx = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2}$

Luego: $F(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{array}\right\}$

c) $E(x) = \int xf(x)dx$

$$E(x) = \int_0^1 \left[\frac{3}{2} - x\right]xdx = \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$\mathrm{var}(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$E(X^2) = \int x^2 f(x)dx = \int_0^1 \left[\frac{3x^2}{2} - x^3\right]dx = \left[\frac{3x^3}{6} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

19.

Por ser función de densidad: $1 = \int_0^2 (ax^2 + b) = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + b[x]_0^2 = \frac{8}{3}a + 2b$

Por otro lado: $0{,}1357 = P(0{,}5 < x < 1) = \int_{0,5}^1 (ax^2 + b)dx = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,5}^1 + b[x]_{0,5}^1 = \frac{7}{24}a + \frac{b}{2}$

Luego:

$$8a + 6b = 3$$
$$7a + 12b = 3{,}2568$$

$a = 0{,}3048 \qquad b = 0{,}0936$

20.

Derivando la función de distribución: $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{2x}{25} \quad 0 \le x < 5$

$$E(X) = \int_0^5 \frac{2x^2}{25}dx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{10}{3}$$

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_0^5 \frac{2x^3}{25}dx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^5 = \frac{25}{2}$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{18} \qquad DT(X) = \sqrt{\frac{25}{18}} = 1{,}1785$$

21.

a) $p[x < 7] = p\left[\frac{x - 10}{2} < \frac{7 - 10}{2}\right] = p[z < -1{,}5] =$

$= p[z > 1{,}5] = 1 - p[z \le 1{,}5] = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

b) $p[8 < x < 13] = p\left[\frac{8 - 10}{2} < \frac{x - 10}{2} < \frac{13 - 10}{2}\right] = p[-1 < z < 1{,}5] =$

$= p[z < 1{,}5] - p[z < -1] = p[z < 1{,}5] - p[z > 1] =$

$= p[z < 1{,}5] - (1 - p[z \le 1]) = 0{,}9332 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}7745$

22.

Si llamamos x = "número de pantalones defectuosos en una caja", entonces x es una binomial con $n = 80$; $p = 0{,}07$, en la que hay que calcular $p[x > 10]$.

La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 80 \quad 0{,}07 = 5{,}6$; su desviación típica es $\sqrt{npq} = 2{,}28$.

x es $B(80;\ 0{,}07) \to x'$ es $N(5{,}6;\ 2{,}28) \to z$ es $N(0, 1)$

$p[x > 10] = p[x' \geq 10{,}5] = p\left[z \geq \frac{10{,}5 - 5{,}6}{2{,}28}\right] = p[z \geq 2{,}15] =$
$= 0{,}0158$

23.

Si llamamos $X =$ "número de respuestas acertadas", entonces X es una binomial con $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$, en la que tenemos que calcular:

$p[x > 60]$ (La media de x es $np = 50$. Su desviación típica es $\sqrt{npq} = 5$).

La calculamos aproximando con una normal:

$$x \text{ es } B\left(100, \frac{1}{2}\right) \rightarrow x' \text{ es } N(50, 5) \rightarrow z \text{ es } N(0, 1)$$

$$p[x > 60] = p[x' \geq 60{,}5] = p\left[z \geq \frac{60{,}5 - 50}{5}\right] = p[z \geq 2{,}1] =$$
$$= 1 - p[z < 2{,}1] = 1 - 0{,}9821 = 0{,}0179 \rightarrow p[x > 60] = 0{,}0179$$

24.

Sea X el número de llamadas por minuto que se reciben. Tenemos que X sigue una distribución de Poisson, con $\lambda = 5$. La función de masa que viene dada por:

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-x}}{x!}.$$

Nos piden la probabilidad:

$P(X<4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 + 0{,}1404 = 0{,}2650$

25.

Sea X el número de árboles no vendibles en una fila, tenemos que $X \sim P\ (\lambda = 6)$. Sea Y el número de árboles no vendibles en media fila. El número medio de árboles no vendibles en media fila es 3. Si suponemos que siguen igual distribución, tenemos que $Y \sim P\ (\lambda = 3)$.

a) $P\ (X = 2) = \dfrac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} = 0{,}0446$

b) $P\ (Y = 2) = \dfrac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = 0{,}2240$

26.

a) Es una distribución binomial con $n = 10$, $p = 0{,}02 \rightarrow B(10;\ 0{,}02)$

b) Es una distribución binomial con $n = 10$, $p = \dfrac{3}{7} \rightarrow B\left(10,\ \dfrac{3}{7}\right)$

c) Es una distribución binomial con $n = 20$, $p = 0{,}03 \rightarrow B(20;\ 0{,}03)$

d) No se trata de una binomial, ya que tenemos más de dos resultados posibles: rojo, blanco, verde.

27.

- $p[x > 200] = p\left[\dfrac{x-192}{12} > \dfrac{200-192}{12}\right] = p[z > 0{,}67] = 0.2514$
- $p[180 < x < 220] = p\left[\dfrac{180-192}{12} < \dfrac{x-192}{12} < \dfrac{220-192}{12}\right] =$

$= p[-1 < z < 2{,}33] = p[z > -1] - p[z > 2.33] =$

$= p[z < 1] - p[z > 2.33] = (1 - p[z > 1]) - p[z > 2.33] = \ 0{,}8314$